ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
(ΙΗΣΟΥΪΤΩΝ)

• ΛΥΣΕΙΣ 2000 ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ
• ΟΛΑΙ ΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΥΠΟ F. G.-M.

ΠΛΗΡΗΣ ΚΑΙ ΠΙΣΤΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ
ΕΚ ΤΗΣ Ε' ΓΑΛΛΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ
ΥΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Δ. ΓΚΙΟΚΑ
Τ. ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΙΙΙ

COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

EXERCICES
DE GEOMETRIE
COMPRENANT
L' EXPOSÉ DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES
ET 2000 QUESTIONS RÉSOLUES
PAR F. G. - M.

CINQUIÈME ÉDITION

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Π. ΧΙΩΤΕΛΛΗ
ΑΘΗΝΑΙ

2) Ἡ πρότασις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παρατήρησις ἐπὶ τοῦ γεωμ. τόπου τῆς § 1372.

3) Ἐκ τῆς τεμνούσης AM', εὑρίσκομεν

$$\frac{M'O'}{O'N'} = \frac{MO}{ON}, \text{ ἐπειδὴ } \widehat{M'} = \widehat{M}, \ \widehat{O'} = \widehat{O}, \ \widehat{N'} = \widehat{N}.$$

4) Ἐπίσης,

$$\frac{M''O''}{O''N''} = \frac{MO}{ON}, \text{ ἀφοῦ } \widehat{M''} = \widehat{M'} = \widehat{M}, \ \widehat{O''} = \widehat{O}, \ \widehat{N''} = \widehat{N}.$$

Θεώρημα ἀντίστροφον 390—I

1279 β. Ἐὰν φέρωμεν τυχοῦσαν χορδὴν AMN (Σχ. 805) δι' ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων δύο τεμνομένων περιφερειῶν καὶ διαιρέσωμεν τὸ τμῆμα MN εἰς δύο ἄλλα OM, ON κατὰ δοθέντα λόγον πρὸς ἄλληλα, τὸ σημεῖον O θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ περιφερείας AOBO', διερχομένης διὰ τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο πρώτων.

Θεώρημα 390—II

1280. Ἐὰν τρεῖς περιφέρειαι ἔχουν κοινὴν χορδὴν AB, πᾶσα ἐφαπτομένη εἰς τὸ A πρὸς μίαν τῶν περιφερειῶν διαιρεῖται ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων καὶ τοῦ σημείου A εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι σταθερός.

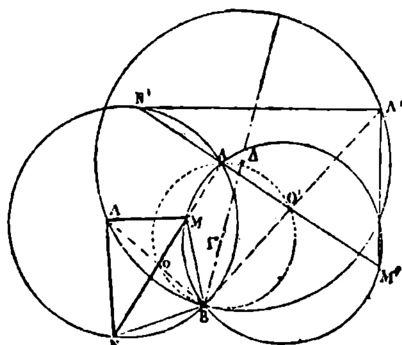
Ἐὰν ἡ εὐθεῖα μAν ἐφάπτεται τῆς περιφερείας OO'O'' (Σχ. 805), τὸ σημεῖον A ἀναλαμβάνει τὸν ρόλον τοῦ O τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\mu A}{\nu A} = \frac{MO}{NO}.$$

Ἀνάλογα συμπεράσματα, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς περιφερείας MM'M'' ἢ τῆς NN'N''.

Θεώρημα 390—III

1281. Ἐὰν τρίγωνον ΛMN κινῆται εἰς τὸ ἐπίπεδόν του εἰς τρόπον, ὥστε νὰ παραμένῃ ὅμοιον ἑαυτῷ, αἱ κορυφαί του M, N νὰ γράφουν περιφερείας τεμνομένας κατὰ κοινὴν χορδὴν AB καὶ ἡ πλευρά του MN νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου A, τότε ἡ τρίτη κορυφὴ αὐτοῦ Λ γράφει περιφέρειαν, διερχομένην διὰ τοῦ σημείου B.



Σχ. 806.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν BΛ καὶ ἔστω O τὸ σημεῖον ὅπου συναντᾶται μετὰ τῆς εὐθείας MN. Τὸ τετράπλευρον ΛMBN παραμένει ὅμοιον πάντοτε πρὸς ἑαυτό, ἐπειδὴ πᾶσαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι σταθε-

ραί, καθὼς καὶ ὁ λόγος $\frac{BM}{BN}$ (§ 1279). Κατὰ συνέπειαν καὶ αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου τούτου θὰ ἀλληλοδιαιροῦνται εἰς τμήματα ἔχοντα σταθεροὺς λόγους πρὸς ἄλληλα.

Εἶναι ἄρα ὁ λόγος $\frac{MO}{ON}$ σταθερὸς ἀριθμὸς καί, κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν (§ 1279), τὸ σημεῖον Ο γράφει περιφέρειαν ΑΟΒ, διερχομένην διὰ τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο ἀρχικῶν περιφερειῶν.

Ἐπειδὴ καὶ ὁ λόγος $\frac{BO}{BΛ}$ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, τὰ σημεῖα Λ καὶ Ο γράφουν περιφερείας, ἐχούσας τὸ σημεῖον Β ὡς ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιότητος (§ 1279 β).

Θεώρημα 390—ΙΙ'

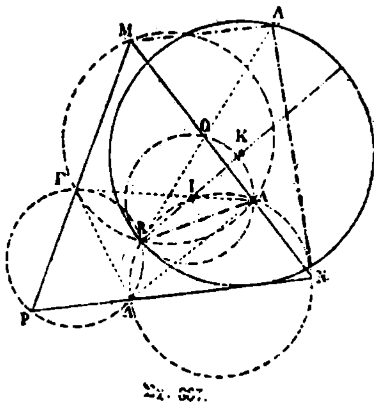
1282. Δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς δύο περιφερειῶν τεμνομένων φέρομεν τεμνούσας αὐτῶν ΑΒΓ καὶ κατασκευάζομεν ἐπ' αὐτῶν σχήματα ὅμοια πρὸς δοθέν. Δείξατε ὅτι τὰ ὁμόλογα σημεῖα τῶν σχημάτων τούτων γράφουν περιφερείας.

Ἡ ἀπόδειξις ἐπιτυγχάνεται διὰ συνδυασμοῦ τῶν θεωρημάτων τῶν §§ 1279 καὶ 1281.

Θεώρημα 391

1283. Ἐὰν ἓν σχῆμα μεταβάλλεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του εἰς τρόπον, ὥστε νὰ παραμένῃ ὅμοιον ἑαυτῷ, τρεῖς δὲ εὐθεῖαι αὐτοῦ νὰ διέρχωνται διὰ τριῶν σταθερῶν σημείων, πᾶν σημεῖον τοῦ σχήματος θὰ γράφῃ περιφέρειαν (Julius Petersen, N. A. 1867, σ. 80).

Ἔστωσαν Α, Γ, Δ τὰ σταθερὰ σημεῖα, ΜΝΡ τὸ τρίγωνον τῶν τριῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων διὰ τῶν σημείων τούτων καὶ Λ τυχὸν σημεῖον τοῦ μεταβλητοῦ σχήματος. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΛΜ καὶ ΛΝ.



Σχ. 667.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΜΝΡ παραμένει ὅμοιον ἑαυτῷ, ἡ κορυφὴ Μ θὰ κινῆται ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΜΓ, δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν σταθερὰν Μ. Ὁμοίως, τὸ σημεῖον Ν θὰ κινῆται ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΝΔ.

Ἐπαναπίπτομεν οὕτω εἰς τὸ προηγούμενον ζήτημα (§ 1281). Ἔστω Β τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῶν περιφερειῶν ΑΜΓ καὶ ΑΝΔ· ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ, Ν κινοῦνται ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τούτων, τὸ σημεῖον Ο θὰ γράφῃ περιφέρειαν ΑΟΒ καὶ τὸ Λ ἄλλην, ἔχουσαν τὸ κέντρον της Κ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ἀκτῖνος ΒΙ.

1283 α. Παρατήρησις. Αἱ περιφέρειαι - τόποι τῶν διαφόρων σημείων Λ τοῦ μεταβλητοῦ σχήματος, διέρχονται πᾶσαι διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου Β.

Πράγματι,

γων. ΑΒΓ = 180° − Μ, ΑΒΔ = 180° − Ν.

Ἄρα: ΓΒΔ = 360° − (Μ + Ν) = 180° − Ρ,

καὶ τὸ σημεῖον Β θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν περιφέρειαν ΓΡΔ, ὡς καὶ εἰς πᾶσαν ἄλλην περιφέρειαν—τόπον σημείου (Λ) (§ 1281).

1284. Σημείωσις. Ἀνεφέραμεν ἤδη καὶ προηγουμένως τὸ τόσον ἀξιόλογον ἔργον τοῦ J. Petersen, καθηγητοῦ εἰς τὸ Πολυτεχνεῖον τῆς Κοπεγχάγης: *Méthodes et Théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques.*

Τὸ ἔργον τοῦτο, μεταφρασθὲν ἤδη ἀπὸ τοῦ 1880 εἰς τὴν Γαλλικὴν καὶ ἀπὸ τῆς 17ης ἐκδόσεως αὐτοῦ, εἶναι χρησιμότατον πρὸς διαπίστωσιν τῆς ὠφελείας τὴν ὁποίαν δύναταί τις νὰ προσπορισθῇ ἐκ μερικῶν μεθόδων καταλλήλως ἐφαρμοζομένων.

Σχετικῶς, ἐν τούτοις, πρὸς τὴν προέλευσιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ δώσωμεν τὰς ἑπομένας βιβλιογραφικὰς πληροφορίας:

Τὰ θεωρήματα §§ 1281—1284, προταθέντα ὑπὸ τοῦ J. Petersen εἰς τὰ Ν. Α. τοῦ 1866, σ. 480 καὶ λυθέντα εἰς τὸ ἴδιον περιοδικὸν τὸ 1867, σ. 80, εἶχον δημοσιευθεῖ ἤδη εἰς τὴν ἰδίαν συλλογὴν ἀπὸ τῶν ἐτῶν 1855, σ. 266 καὶ 1858, σ. 48, εἰς διάφορα ἄρθρα τοῦ De Lafitte, καθηγητοῦ, ὡς εἰδικαὶ περιπτώσεις *ὁμογραφικῶν σχημάτων.*

Θεώρημα τοῦ Lafitte 391—I

Ὅταν ἓν σχῆμα μεταβλητοῦ μεγέθους καὶ θέσεως μένῃ ὅμοιον ἑαυτῷ:

1) Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι αὐτοῦ στρέφωνται περὶ τρία σταθερὰ σημεῖα, ἑκάστη περὶ ἕν, τυχὸν ἄλλο σημεῖον τοῦ σχήματος γράφει περιφέρειαν. Πᾶσαι αἱ περιφέρειαι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν διπλοῦν σημεῖον πάντων τῶν σχημάτων.

2) Ἐὰν τρία σημεῖα αὐτοῦ κινοῦνται ἐπὶ τριῶν εὐθειῶν, ἕκαστον ἐπὶ μιᾶς, πᾶν ἄλλο σημεῖον τοῦ σχήματος γράφει ἐπίσης εὐθεῖαν γραμμήν, μία δὲ τυχοῦσα εὐθεῖα αὐτοῦ περιβάλλει παραβολήν.

Τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα εἶναι θεμελιώδη εἰς τὴν στοιχειώδη σπουδὴν τῶν σχημάτων, ἅτινα μεταβάλλονται κατὰ μέγεθος καὶ θέσιν ἀλλὰ παραμένουν ὅμοια πρὸς δοθὲν σχῆμα.

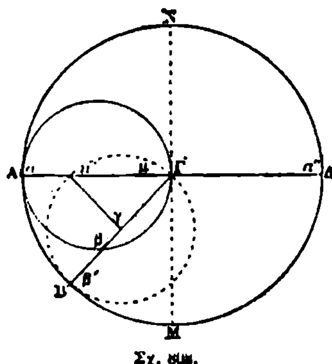
Σημείωσις. Βλέπε ἐπίσης *N. Cor. math.*, τοῦ Catalan, 1880, σ. 72, 172, 219, ἄρθρα τοῦ Neuberg.

Θεώρημα τοῦ La Hire 392

1285. Ἐὰν εἷς κύκλος κυλίεται, ἄνευ ὀλισθήσεως, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς περιφερείας διπλασίας ἀκτῖνος, πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κινητοῦ κύκλου γράφει διάμετρον τῆς σταθερᾶς περιφερείας.

Ἔστω ΑΓ ἡ ἀκτὶς τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας καὶ ἡ διάμετρος τῆς μικροτέρας. Ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μικρὸς κύκλος, τοποθετημένος ἀρχικῶς εἰς τὴν θέσιν αβΓ, κυλίεται, ἄνευ ὀλισθήσεως, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας καὶ ἔστω α'β'Γ μία νέα καὶ τυχοῦσα θέσις αὐτοῦ (ἡ ἐστιγμένη).

Ἔστω Β τὸ νέον σημεῖον ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον α γράφει τὴν διάμετρον ΑΓΔ.



Σχ. 888.

1) Τὸ σημεῖον α θὰ λάβῃ τὴν θέσιν α', ἐπειδὴ ἡ γωνία α'γβ' εἶναι ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας ΑΓΒ καὶ τὰ τόξα, ἄρα, ΑΒ καὶ α'β' θὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ μήκη.

2) Τό, διαμετρικὸν τοῦ α, σημεῖον μ ἔρχεται κατ' ἀρχὰς εἰς τὴν θέσιν Μ· μετὰ μίαν πλήρη κύλισιν, τοῦ μικροῦ κύκλου, τὸ σημεῖο α καταλσυβάνει τὴν θέσιν α'' ≡ Δ καὶ κατα τὴν ἑπομένην πλήρη κύλισιν τὸ σημεῖον τοῦτο γράφει τὴν διάμετρον ΔΓΑ καὶ· ἐπανέρχεται εἰς τὴν θέσιν α ≡ Α.

3) Τὸ σημεῖον μ, ἀρχικῶς ≡ Γ, τοῦ μικροῦ κύκλου γράφει τὴν διάμετρον ΜΓΝ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓΔ.

1285 α. Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδίδεται συνήθως εἰς τὸν La Hire (N. A., 1843, σ. 499 καὶ 1854, σ. 297) καὶ ἐνίοτε εἰς τὸν Cardan (N. A., 1845). Εἰς τὸν πρῶτον πάντως ὀφείλεται ἡ κατασκευὴ τοῦ μηχανισμοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ στηρίζεται ἐπὶ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος καὶ διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνεται ὁ μετασχηματισμὸς μιᾶς κυκλικῆς κινήσεως εἰς εὐθύγραμμον παλινδρομικήν.

Γνωρίζομεν ὅτι πᾶν σημεῖον μιᾶς περιφερείας κυλιομένης, ἄνευ ὀλισθήσεως, ἐπὶ δοθείσης ἄλλης περιφερείας καὶ πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν αὐτῆς, γράφει μίαν *ἐπικυκλοειδῆ* (G. n° 892).

Ἐὰν ἡ κυλιομένη περιφέρεια ἔχῃ διάμετρον ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σταθερᾶς περιφερείας, ἡ γραφομένη καμπύλη εἶναι μία *καρδιοειδής*· πᾶν δὲ ἄλλο σημεῖον τοῦ κινητοῦ ἐπιπέδου γράφει ἕνα *κοχλίαν τοῦ Pascal*, μερικὴ περίπτωσις τοῦ ὁποίου εἶναι ἡ *καρδιοειδής*.

Ἐὰν ἡ κινητὴ περιφέρεια εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σταθερᾶς περιφερείας, ἡ γραφομένη καμπύλη εἶναι *ὑποκυκλοειδής*. Ἡ καμπύλη αὐτη γίνεται εὐθεῖα γραμμὴ ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς κυλιομένης περιφερείας εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σταθερᾶς· πᾶν δὲ ἄλλο τότε σημεῖον τοῦ κινητοῦ ἐπιπέδου γράφει ἔλλειψιν (§ 2162).

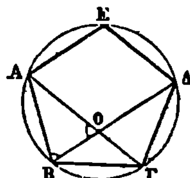
Ἀριθμητικαὶ σχέσεις.— Περιφέρεια

Θεώρημα 393

1286. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου τέμνονται κατὰ μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Τὸ τρίγωνον ΓΟΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἐπειδὴ αἱ εἰς τὰ Γ καὶ Β

γωνίαι αὐτοῦ βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων. Τὰ δὲ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΓΟΒ, ΓΑΒ ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς ὀξείας αὐτῶν γωνίας ἴσας.



Σχ. 809.

Ἄρα:

$$\frac{ΓΟ}{ΓΒ} = \frac{ΓΒ}{ΓΑ}, \quad ΓΒ^2 = ΓΟ \cdot ΓΑ.$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελές, ἀφοῦ αἱ γωνίαι εἰς τὰ Ο καὶ Β ἔχουν τὰ αὐτὰ μέτρα, θὰ ἔχωμεν

$$ΟΑ = ΑΒ = ΒΓ,$$

καὶ κατὰ συνέπειαν

$$ΑΟ^2 = ΓΟ \cdot ΓΑ.$$

Θεώρημα 393—I

1287. Ἐὰν διαιρέσωμεν εὐθεῖαν κατὰ μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ μικροτέρου τμήματος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος.

Ἔστω α τὸ μῆκος τῆς εὐθείας, μ τὸ τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος καὶ $ν = α - μ$ τὸ τοῦ μικροτέρου. Θὰ ἔχωμεν

$$μ^2 = ν^2 + α^2 - 2αν.$$

Ἀλλ' ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι: $μ^2 = αν$· ἄρα:

$$3μ^2 = α^2 + ν^2.$$

Παρατήρησις. Ἐπίσης: $α^2 + ν^2 = 3αν.$

Σημείωσις. Ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἓν ὡραῖον ἄρθρον τοῦ Cl. Thiry: *Sur quelques propriétés d'une droite divisée en moyenne et extrême raison.* (*Mathesis*, 1894, σ. 22).

Θεώρημα 394

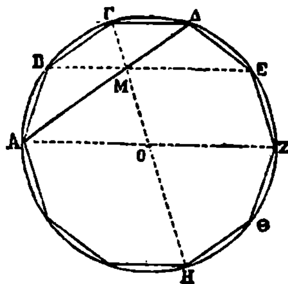
1288. Ἡ χορδὴ ἡ ὑποτείνουσα τόξον τριπλάσιον τοῦ ἀντιστοίχου τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς ταύτης καὶ τῆς ἀκτῖνος.

Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι

$$ΑΔ = ΑΟ + ΓΔ.$$

Αἱ γωνίαι ΔΓΜ καὶ ΔΜΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι ἴσα μέτρα· ἐπίσης, αἱ γωνίαι εἰς τὰ Μ καὶ Ο. Εἶναι, ἑπομένως, τὰ τρίγωνα ΓΔΜ, ΜΑΟ ἰσοσκελῆ καὶ

$$ΑΔ = ΑΟ + ΓΔ.$$



Σχ. 810.

Θεώρημα 395

1289. Εἰς τὴν μέθοδον τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ϱ καὶ α τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου τοῦ

ἔχοντος ν πλευρὰς καὶ διὰ ρ', α' τὰ ἴδια μήκη διὰ τὸ ἔχον 2ν πλευρὰς πολύγωνον, θὰ εἶναι

$$\rho' - \alpha' < \frac{1}{4}(\rho - \alpha).\quad \text{(N. A. 1847, σ. 27).}$$

Σχ. 811.

Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος ΟΑ δι' ἀκτῖνα καὶ ΟΔ δι' ἀπόστημα. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας, τὰς συνδεούσας τὰ μέσα Α', Β' τῶν ἴσων χορδῶν ΓΑ, ΓΒ, ἡ εὐθεῖα Α'Β' θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπεριμέτρου πρὸς δοθὲν πολυγώνου καὶ ἔχοντος διπλάσιον πλῆθος πλευρῶν· ἐπειδὴ

$$A'B' = \frac{1}{2}AB \quad \text{καὶ γων. } A'OB' = \frac{1}{2}\text{γων. } AOB.$$

Ἀλλ' εἶναι $\rho' = A'O,\ \alpha' = O\Delta'$·

ἄρα: $\rho - \alpha = \Gamma\Delta,\ \rho' - \alpha' = \Gamma'\Delta'$.

Ἐπειδὴ $\Gamma\Delta' = \frac{1}{2}\Gamma\Delta$ καί, ἑπομένως, $\Gamma\Delta' = \Delta\Delta'$, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\Gamma'\Delta' < \Gamma\Gamma'.$$

Ἡ εὐθεῖα Α'Γ' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΑ'Δ' καὶ ἐπειδὴ $A'\Delta' < A'\Gamma$ ἕπεται ὅτι $\Gamma'\Delta' < \Gamma\Gamma'$ (§ 182). Ἄρα:

$$\Gamma'\Delta' < \frac{1}{2}\Gamma\Delta' < \frac{1}{4}\Gamma\Delta.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν:

$$\rho'' - \alpha'' < \frac{1}{4}(\rho' - \alpha') < \frac{1}{16}(\rho - \alpha),$$

καὶ γενικῶς,

$$\rho_\nu - \alpha_\nu < \frac{1}{4^\nu}(\rho - \alpha).$$

Τείνει, ἑπομένως, ἡ διαφορὰ $\rho_\nu - \alpha_\nu$ πρὸς τὸ μηδὲν διὰ $\nu \to \infty$.

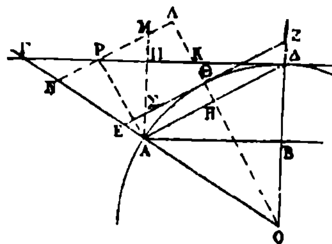
1289 α. Σημείωσις. Ἡ *μέθοδος τῶν ἰσοπεριμέτρων* ἀποδίδεται εἰς τὸν Schwab ἀλλ' ὀφείλεται εἰς τὸν Descartes· ἀναφέρεται δὲ καὶ εἰς ἓν τῶν ὑπομνημάτων τοῦ Euler. (Κατὰ τὸν Catalan, N. A., 1864, σ. 545).

Θεώρημα 396

1290. **Ἡ διαφορὰ τῶν περιμέτρων δύο κανονικῶν πολυγώνων $\Pi_{2\nu}$, $\Pi'_{2\nu}$, ἐκ 2ν πλευρῶν ἕκαστον καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ἄλλο περιγεγραμμένον εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, εἶναι μικροτέρα τοῦ τετάρτου τῆς διαφορᾶς τῶν περιμέτρων δύο κανονικῶν πολυγώνων Π_ν, Π'_ν, ὡς τὰ πρῶτα, ἀλλ' ἐκ ν πλευρῶν ἕκαστον.**

Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ τὰ ἡμίση τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων Π_ν, Π'_ν καὶ ΑΔ, ΕΖ αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων $\Pi_{2\nu}$, $\Pi'_{2\nu}$.

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΘ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΖ, τὴν ΑΡ παράλληλον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΟΘ, τὴν ΑΣΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΟΔ καὶ τὴν ΡΜΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ.



Σχ. 812.

ΕΣ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν πολυγώνων μὲ 2ν πλευράς, ΓΠ ἡ διαφορὰ τῶν ἡμίσεων τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων μὲ ν πλευράς. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ

$$ΕΣ < \frac{1}{4} ΓΠ.$$

Ἕνεκα τῶν ἴσων τριγώνων ΟΘΖ, ΟΔΚ, ἡ εὐθεῖα ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΚ, ἡ δὲ κάθετος ΘΗ μικροτέρα τῆς πλαγίας ΔΖ. Ἐπίσης, ΗΚ=ΛΚ, ἀφοῦ ΡΚ=ΔΚ. Ἑπομένως,

$$ΗΘ < ΘΚ, \text{ ὅθεν } ΗΘ < \frac{1}{2} ΗΚ = \frac{1}{4} ΑΡ. \qquad (1)$$

Εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα, ἀφ' ἑτέρου, ΕΑΣ, ΝΑΜ, αἱ βάσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν:

$$\frac{ΕΣ}{ΜΝ} = \frac{ΗΘ}{ΑΡ}.$$

ἄρα, ἐκ τῆς (1),

$$ΕΣ < \frac{1}{4} ΝΜ.$$

Καὶ ἐπειδὴ ἡ κάθετος ΝΜ ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΡ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΠ, ἕπεται

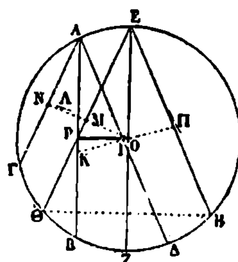
$$ΕΣ < \frac{1}{4} ΝΜ < \frac{1}{4} ΓΠ.$$

(Ν. Α., 1843, σ. 158).

Θεώρημα 397

1291. Διὰ τοῦ ἄκρου Α μιᾶς χορδῆς ΑΒ φέρομεν δύο ἄλλας ΑΓ, ΑΔ, ἴσον κεκλιμένας πρὸς αὐτήν, ἐκ τυχόντος δὲ ἄλλου σημείου Α' τῆς περιφερείας ἄγομεν παραλλήλους χορδὰς Α'Γ', Α'Β', Α'Δ' πρὸς τὰς τρεῖς ἀχθείσας.

Δείξατε ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΑΓ + ΑΔ}{ΑΒ}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον $\frac{Α'Γ' + Α'Δ'}{Α'Β'}$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ σημείου Α' τῆς περιφερείας. (Maclaurin, 1743).



Σχ. 813.

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΕΖ καὶ τὰς χορδὰς ΕΘ, ΕΗ παραλλήλους ἀντιστοίχως τῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ΑΔ χορδῶν, ἐκ δὲ τοῦ κέντρου Ο τὰς καθέτους ΟΜΝ, ΙΟΠ καὶ ΟΡ. Ἡ τελευταία εὐθεῖα εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΛΟΚ καὶ θὰ εἶναι ΡΛ = ΡΚ, ὡς καὶ ΜΕ = ΠΕ, ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΕΘΗ.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΛΑΝ, ΟΜΕ καὶ ΑΙΚ, ΕΠΟ εὑρίσκομεν, ἀντιστοίχως, τὰς ἀναλογίας

$$\frac{AN}{A\Lambda}=\frac{ME}{OE} \text{ καὶ } \frac{AI}{AK}=\frac{\Pi E}{OE}=\frac{ME}{OE}.$$

Ἑπομένως,

$$\frac{AN}{A\Lambda}=\frac{AI}{AK}=\frac{ME}{OE}, \quad \frac{AN+AI}{A\Lambda+AK}=\frac{ME}{OE}.$$

Ἀλλὰ $\qquad A\Lambda+AK=2\,AP=AB\cdot$ ἄρα

$$\frac{AN+AI}{AB}=\frac{ME}{OE}=\frac{E\Theta}{EZ} \text{ ἢ } \frac{2AN+2AI}{AB}=\frac{2E\Theta}{EZ},$$

δηλ. $$\frac{A\Gamma+A\Delta}{AB}=\frac{E\Theta+EH}{EZ}=\text{σταθ.}=\frac{A'\Gamma'+A'\Delta'}{A'B'}.$$

1291 α. Ἀλγεβρικὴ ἀπόδειξις. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{A\Gamma+A\Delta}{AB}$ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, θέτομεν

$$A\Gamma=2\gamma, \quad AB=2\beta, \quad A\Delta=2\delta,$$
$$\text{γων. } \Gamma AB=BA\Delta=\varphi, \quad \text{γων. } BAO=\chi.$$

Θὰ ἔχωμεν:

$$\gamma=R\,\text{συν}(\varphi+\chi), \quad \delta=R\,\text{συν}(\varphi-\chi),$$

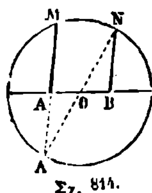
καὶ $$\beta=R\,\text{συν}\,\chi.$$

Ἑπομένως:

$$\frac{\gamma+\delta}{\beta}=\frac{\text{συν}(\varphi+\chi)+\text{συν}(\varphi-\chi)}{\text{συν}\,\chi}=2\,\text{συν}\,\varphi=\text{σταθερὸς ἀριθμός}.$$

Θεώρημα 398

1292. Διὰ δύο σημείων Α καὶ Β ἐπὶ διαμέτρου περιφερείας καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου κειμένων, φέρομεν δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΜ, ΒΝ περατουμένας εἰς τὴν αὐτὴν ἡμιπεριφέρειαν. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον ΑΜ . ΒΝ εἶναι σταθερὰ ποσότης. (*Porismes d'Euclide* τοῦ Chasles σ. 306).



Σχ. 814.

Ἂς προεκτείνωμεν τὰς ΜΑ καὶ ΝΟ μέχρι τῆς τομῆς των Λ.

Τὸ σημεῖον Λ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν. Τὰ τρίγωνα, πράγματι, ΑΟΛ, ΒΟΝ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἐπειδὴ Α = Β, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ κλπ.

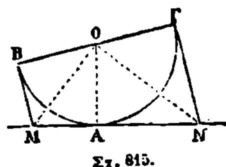
Ἄρα $\qquad O\Lambda=ON, \quad A\Lambda=BN.$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον ΑΜ . ΑΛ εἶναι σταθερὰ ποσότης διὰ πᾶσαν χορδὴν διὰ τοῦ σημείου Α, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ γινόμενον ΑΜ . ΒΝ εἶναι ἐπίσης σταθερὰ ποσότης.

Παρατήρησις. ΑΜ . ΒΝ = R^2 — $ΟΑ^2$ καὶ τὸ θεώρημα τοῦτο ὁδηγεῖ εἰς γνωστὴν ἰδιότητα τῆς ἐλλείψεως (ἐπμ. § 2084).

Θεώρημα 398—I

1293. Δίδεται περιφέρεια καὶ σταθερὰ ἐφαπτομένη (ε) αὐτῆς εἰς σημεῖον Α· δείξατε ὅτι δύο τυχοῦσαι παράλληλοι ἐφαπτόμεναι ὁρίζουν ἐπὶ τῆς (ε) τμήματα ΑΜ, ΑΝ, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι σταθερὰ ποσότης. (Porismes d'Euclide, σ. 305).



Σχ. 815.

Ἡ γωνία ΜΟΝ εἶναι ὀρθή, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ΑΜΟ, ΒΜΟ καὶ ΑΝΟ, ΓΝΟ. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΟΝ ἔχομεν :

$$ΑΜ . ΑΝ = ΑΟ^2 = R^2.$$

Ὥστε . . .

Παρατήρησις. Ἐπίσης : ΒΜ . ΓΝ = $ΑΟ^2$.

Θεώρημα 398—II

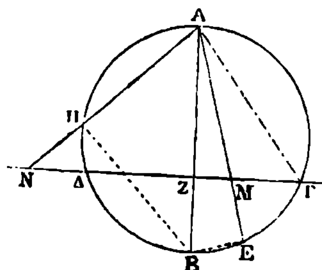
1294. Εἰς περιφέρειαν, θεωροῦμεν χορδὴν ΓΔ καὶ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτὴν διάμετρον ΑΖΒ. Δείξατε ὅτι, ἂν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ΓΔ, τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν ΑΜ . ΑΕ εἶναι σταθερὰ ποσότης.

1η Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν ΒΕ. Ἐπειδὴ τοῦ τετραπλεύρου ΖΜΕΒ δύο ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ὀρθαί, τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον· ἄρα

ΑΕ . ΑΜ = ΑΖ . ΑΒ = σταθερὰ ποσότης.

Ὁμοίως,

$$ΑΝ . ΗΑ = ΑΒ . ΑΖ = ΑΓ^2 = σταθ.$$



Σχ. 816.

2α Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα ΑΜΖ, ΑΒΕ εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια. Ἑπομένως,

$$\frac{ΑΕ}{ΑΖ} = \frac{ΑΒ}{ΑΜ} \text{ καὶ } ΑΕ . ΑΜ = ΑΒ . ΑΖ.$$

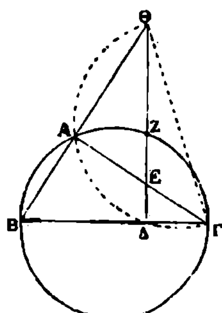
Παρατηρήσεις. 1) Ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι τὸ ἀντίστροφον σχῆμα τῆς περιφερείας πρὸς πόλον Α καὶ δύναμιν $Κ^2$ = ΑΒ . ΑΖ (§ 223).

2) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις ἑνὸς γενικωτέρου (§ 1175).

Θεώρημα 398—III

1295. Ἔστω ΑΒΓ ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ΔΕΖΘ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ εἰς τυχὸν αὐτῆς σημεῖον Δ, τέμνουσα τὴν ΑΓ, τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Θ ἀντιστοίχως. Δείξατε τὴν σχέσιν $ΔΖ^2$ = ΔΘ . ΔΕ.

Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι



Σχ. 817.

$$\frac{\Delta\Theta}{\Delta Z} = \frac{\Delta Z}{\Delta E}.$$

Ἐπειδὴ

$$\Delta Z^2 = \Delta B \,.\, \Delta\Gamma,$$

ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\Delta\Theta \,.\, \Delta E = B\Delta \,.\, \Delta\Gamma,$$

ἢ

$$\frac{\Delta\Theta}{\Delta B} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta E}.$$

Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΔΘ καὶ ΓΔΕ. Ὥστε...

Παρατήρησις.

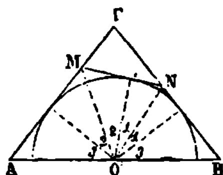
$$\Delta E \,.\, E\Theta = \Delta Z^2 - \Delta E^2 = AE \,.\, E\Gamma.$$

Πράγματι, ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΓΑΔΘ εὑρίσκομεν

$$\Delta E \,.\, E\Theta = AE \,.\, E\Gamma.$$

Θεώρημα 399

1296. Μὲ κέντρον τὸ μέσον τῆς βάσεως ΑΒ ἰσοσκελοῦς τριγώνου γράφομεν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐὰν μία κινητὴ ἐφαπτομένη τέμνῃ τὰς ἴσας πλευρὰς εἰς Μ, Ν, δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον ΑΜ . ΒΝ εἶναι σταθερὰ ποσότης. (*Porismes d'Euclide*, σ. 297).



Σχ. 618.

Τὰ τρίγωνα ΑΟΜ, ΒΟΝ εἶναι ἰσογώνια. Ἐπειδή:

$$\widehat{1} = \widehat{1},\ \widehat{2} = \widehat{2},\ \widehat{3} = \widehat{3},\ 1 + 2 + 3 = 90^\circ,$$

καὶ

$$\text{γων. } AMO = 90^\circ - \widehat{2} = \widehat{1} + \widehat{3} = NOB,\ \widehat{A} = \widehat{B}.$$

Ἄρα

$$\frac{AM}{AO} = \frac{OB}{BN} \text{ ἢ } AM \,.\, BN = AO \,.\, BO = AO^2 = \text{σταθ.}$$

Θεώρημα 399—I

1297. Διὰ σημείου Λ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ περιφερείας, φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΓΛΔ. Αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΒΔ τέμνουν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Α εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ.

Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον ΑΕ . ΑΖ εἶναι σταθερὰ ποσότης.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΛΝ παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Α.

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΓΜ, ΔΝ εἶναι ἀντιπαράλληλοι. Πράγματι,

$$\widehat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{BK} - \widehat{\Gamma I}) = \frac{1}{2}\widehat{B\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Delta} = \frac{1}{2}\widehat{B\Gamma}.$$

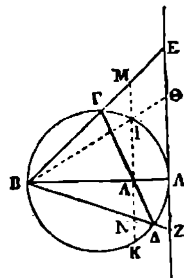
ἄρα $\widehat{M} = \widehat{\Delta}$,

καὶ τὸ τετράπλευρον ΓΜΝΔ εἶναι ἐγγράψιμον, ἐξ οὗ

$$\Lambda M \cdot \Lambda N = \Lambda \Gamma \cdot \Lambda \Delta = \Lambda I^2,$$

ἢ καί, ἀφοῦ τὰ τμήματα ΑΕ, ΑΖ, ΑΘ εἶναι ἀνάλογα τῶν ΛΜ, ΛΝ, ΛΙ,

$$AE \cdot AZ = A\Theta^2 = \text{σταθερὰ ποσότης}.$$

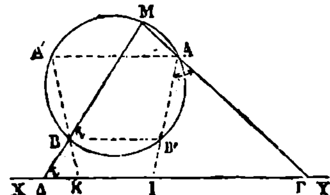


Σχ. 819.

Θεώρημα 400

1298. Δίδονται εὐθεῖαι ΧΥ, περιφέρεια καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπ' αὐτῆς. Τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας ὁρίζει διὰ τῶν εὐθειῶν ΜΒ, ΜΑ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἐπὶ τῆς ΧΥ.

Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης δύο σημεῖα Ι καὶ Κ τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον ΓΙ . ΔΚ νὰ εἶναι σταθερὰ ποσότης, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας. (*Concours* τοῦ 1876, *Mathématiques élémentaires*).



Σχ. 820.

Φέρομεν τὰς παραλλήλους ΑΑ', ΒΒ' πρὸς τὴν ΧΥ καὶ τὰς ΑΒ'Ι, Α'ΒΚ. Τὰ τρίγωνα ΑΙΓ καὶ ΔΚΒ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ $\widehat{I} = \widehat{K}$, ὡς ἐκ τῆς συμμετρίας τοῦ σχήματος, καὶ $\widehat{A} = \widehat{MBB'}$, ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ παραπλήρωμα ΜΑΒ'. Ἑπομένως,

$$\frac{I\Gamma}{BK} = \frac{AI}{\Delta K} \quad \text{καὶ} \quad I\Gamma \cdot \Delta K = AI \cdot BK = \text{σταθερὰ ποσότης}.$$

1298 α. Σημείωμα ἐπὶ τῆς ὁμογραφίας. Ἐὰν μία γωνία σταθεροῦ μεγέθους στρέφεται περὶ τὴν ἀκίνητον κορυφήν της, αἱ τομαὶ Α, Α'..., Β, Β'... τῶν πλευρῶν της μετὰ σταθερᾶς εὐθείας ΧΥ ὁρίζουν ἐπ' αὐτῆς δύο *διαιρέσεις ὁμογραφικάς*, δηλ. δύο σειρὰς σημείων ἀντιστοίχων ἀνὰ δύο καὶ τοιούτων ὥστε τὰ γινόμενα τῶν ἀποστάσεων δύο τυχόντων *(ὁμολόγων)* ἐξ αὐτῶν Μ, Μ', ἀπὸ δύο σταθερῶν σημείων Ι, Κ νὰ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός: $(MI).(M'K) = \kappa^2$. Ὁμογραφικὰς διαιρέσεις δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ ἐπὶ δύο διαφόρων εὐθειῶν.

Τὴν *ὁμογραφίαν* ὀφείλομεν εἰς τὸν Chasles (*Géométrie supérieure*, κεφ. IV καὶ VII). Ὁ ἐπιφανὴς οὗτος μαθηματικὸς καθώρισε τὴν ὁμογραφίαν διὰ τῆς (χαρακτηριστικῆς αὐτῆς) ἰδιότητος, καθ' ἣν δύο τετράδες ὁμολόγων σημείων εἰς τὰς δύο διαιρέσεις ἔχουν τὸν αὐτὸν *ἀναρμονικὸν λόγον*, θεωρεῖ τὴν *ἐνέλιξιν* ὡς εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς

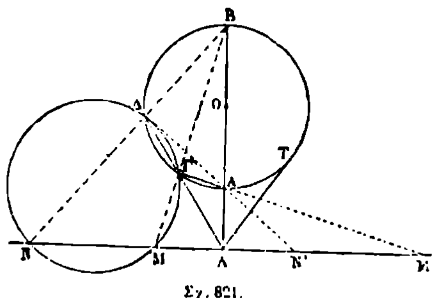
ὁμογραφίας (κεφ. IX) καὶ ἀνευρίσκει οὕτω μέγα ἀριθμῶν νέων προτάσεων, ἀναφερομένων εἰς δύο ἐν ἐνελίξει σημειοσειράς.

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἰσχυροῦ τούτου ἀναλυτικοῦ ὀργάνου ἐπανεξετάζει τὰς ἐργασίας τῶν προγενεστέρων αὐτοῦ μαθηματικῶν καὶ συσχετίζει πρὸς ἄλληλα τὰ πλέον σπουδαῖα θεωρήματα ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν. Οὕτω, τὰ θεωρήματα ἐπὶ τοῦ *ἑξαγράμμου τοῦ Pascal* (§ 1117 γ), τοῦ *τετραπλεύρου τοῦ Πάππου* (§ 1214), *τῆς ἐνελίξεως* τοῦ *Desargues* (§ 1219), τὰ τῶν *Carnot* (§ 1250), *Brianchon* (§ 2121), *Νεύτωνος* (§ 2103) κλπ. ἐμφανίζονται ὡς ἄμεσοι συνέπειαι, τὰ μὲν τῶν δέ. (Chasles, *Traité des sections coniques*, κεφ. II καὶ III).

Εἰς τὰ *Στοιχεῖα Προβολικῆς Γεωμετρίας* τοῦ Cremona, ὁ μαθηματικὸς οὗτος παράγει τὴν *ὁμογραφίαν* ἐκ *κεντρικῆς προβολῆς*. Κατὰ αὐτόν, μία ἀκολουθία σημείων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας συνιστᾷ μίαν *σημειοσειράν*, αἱ *ὁμογραφικαὶ διαιρέσεις* ἐπὶ δύο εὐθειῶν εἶναι δύο *προβολικαὶ σημειοσειραὶ* κλπ.

Θεώρημα 400—I

1299. **Διὰ σημείου Λ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ περιφερείας, ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς, φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΛΓΔ καὶ κάθετον ΛΜΝ ἐπὶ τὴν διάμετρον, συναντῶσαν τὰς ΒΓ, ΒΔ εἰς τὰ Μ καὶ Ν. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον ΛΜ. ΛΝ εἶναι σταθερὰ ποσότης** (Ν. Α. 1844, σ. 502).



Σχ. 821.

Τὸ τετράπλευρον ΓΔΝΜ εἶναι ἐγγράψιμον, ἀφοῦ

$$\widehat{N} \doteq \Delta\widehat{A}B = \Delta\widehat{\Gamma}B.$$

Ἑπομένως,

$$\Lambda M \,.\, \Lambda N = \Lambda\Gamma \,.\, \Lambda\Delta = \Lambda T^2, \text{ ποσότης σταθερά.}$$

Παρατήρησις. Τὰ σημεῖα Μ, Ν γράφουν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΛΜΝ ὁμογραφικὰς σημειοσειρὰς (§ 1298 α).

Θεώρημα 400—II

1300. **Ἐὰν ἐκ σημείου Ρ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ περιφερείας, φέρωμεν εὐθεῖαν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας, ὡς καὶ ἐπὶ τὴν ΡΜ κάθετον, συναντῶσαν τὰς εἰς τὰ Α καὶ Β ἐφαπτομένας κατὰ τὰ σημεῖα**

Γ καὶ Δ, τὸ γινόμενον ΑΓ . ΒΔ θὰ εἶναι σταθερὰ ποσότης (Porismes d'Euclide, σ. 295).

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$ΑΓ . ΒΔ = ΑΡ . ΡΒ = σταθ.$$

Αἱ γωνίαι ΜΓΡ, ΜΡΔ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἴσας γωνίας α καὶ β. Αἱ δὲ γωνίαι ΑΓΜ, ΒΡΜ εἶναι ἐπίσης ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΡΜ.

Ἐὰν ἐκ τῶν τελευταίων τούτων γωνιῶν ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας ΜΓΡ καὶ ΜΡΔ, αἱ προκύπτουσαι γωνίαι γ καὶ ρ θὰ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ τρίγωνα ΓΡΑ καὶ ΔΡΒ ὅμοια. Συνεπῶς

$$\frac{ΑΓ}{ΑΡ} = \frac{ΒΡ}{ΒΔ}$$

ἢ $$ΑΓ . ΒΔ = ΑΡ . ΒΡ.$$

Σχ. 822.

Παρατήρησις. Ἐπίσης: ΓΜ . ΜΔ = ΜΡ².

Θεώρημα 400—III

1301. Δίδονται δύο περιφέρειαι, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ κέντρον Α τῆς μιᾶς κεῖται ἐπὶ τῆς ἄλλης (Ε). Ἐὰν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Β τῆς περιφερείας (Α) φέρωμεν ἐφαπτομένην ΒΜΝ, συναντῶσαν τὴν (Ε) κατὰ τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν ΑΜ . ΑΝ θὰ εἶναι σταθερὰ ποσότης. (Porismes d'Euclide, σ. 305).

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΓ καὶ τὴν ἀκτῖνα ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΑΝ, ΒΑΜ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν $\widehat{Γ}$, ἕνεκα τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΜΝΓ. Συνεπῶς

Σχ. 823.

$$\frac{ΑΓ}{ΑΜ} = \frac{ΑΝ}{ΑΒ}$$

ἢ $$ΑΜ . ΑΝ = 2ρ . ρ'.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν ὑψώσωμεν τὴν κάθετον ΕΖ, θὰ ἔχωμεν

$$ΑΖ^2 = 2ρ . ρ' \text{ καὶ } ΑΜ . ΑΝ = ΑΖ^2.$$

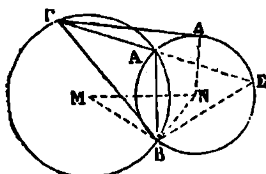
Θεώρημα 401

1302. Δύο περιφέρειαι τέμνονται κατὰ κοινὴν χορδὴν ΑΒ, ἐκ τυχόντος δὲ σημείου Γ τῆς μιᾶς φέρομεν ἐφαπτομένην ΓΔ πρὸς τὴν ἄλλην. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΓΔ^2}{ΓΑ . ΓΒ}$ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός.

Ἐπειδή:

$$ΓΔ^2 = ΓΑ \,.\, ΓΕ,$$

τὰ δὲ τρίγωνα ΓΒΕ, ΜΒΝ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὰ Γ καὶ Ε εἶναι ἴσαι, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰς ἐπικέντρους εἰς τὰ Μ καὶ Ν. Συνεπῶς



Σχ. 824.

$$\frac{ΓΕ}{ΓΒ} = \frac{ΜΝ}{ΜΒ}, \quad ΓΕ = ΓΒ \,.\, \frac{ΜΝ}{ΜΒ}$$

καὶ

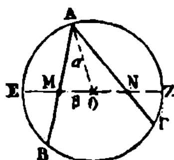
$$ΓΔ^2 = ΓΑ \,.\, ΓΕ = ΓΑ \,.\, ΓΒ \,.\, \frac{ΜΝ}{ΜΒ}$$

ἤ

$$\frac{ΓΔ^2}{ΓΑ \,.\, ΓΒ} = \frac{ΜΝ}{ΜΒ} = \text{σταθερὸς ἀριθμός.}$$

Θεώρημα 401—I

1303. Συνδέομεν τυχὸν σημεῖον Α περιφερείας πρὸς δύο ἄλλα σταθερὰ Μ, Ν, κείμενα ἐπὶ διαμέτρου καὶ συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον, δι' εὐθειῶν τεμνουσῶν τὴν περιφέρειαν εἰς Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν λόγων $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} + \frac{ΝΑ}{ΝΓ}$ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός.



Σχ. 825.

Ἔστωσαν

$$ΟΑ = α, \quad ΟΜ = ΟΝ = β, \quad ΕΜ \,.\, ΜΖ = α^2 - β^2.$$

Θὰ ἔχωμεν:

$$ΜΑ \,.\, ΜΒ = ΜΕ \,.\, ΜΖ = α^2 - β^2. \qquad (1)$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}$ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ $ΑΜ^2$. Εὑρίσκομεν:

$$\frac{ΜΑ^2}{ΜΑ \,.\, ΜΒ} = \frac{ΜΑ^2}{α^2 - β^2},$$

ἤ

$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{ΑΜ^2}{α^2 - β^2}.$$

Ὁμοίως,

$$\frac{ΝΑ}{ΝΒ} = \frac{ΑΝ^2}{α^2 - β^2}.$$

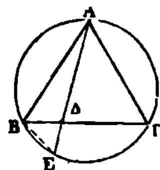
Ἐπομένως,

$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ} + \frac{ΝΑ}{ΝΓ} = \frac{ΑΜ^2 + ΑΝ^2}{α^2 - β^2} = \frac{2α^2 + 2β^2}{α^2 - β^2} = \text{σταθ. ἀριθμός.}$$

Θεώρημα 401—II

1304. Διὰ τῆς κορυφῆς Α ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν χορδὴν ΑΔΕ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, τέμνουσαν τὴν βάσιν ΒΓ εἰς Δ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς Ε. Δείξατε ὅτι $ΑΒ^2 = ΑΔ \,.\, ΑΕ$.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΑΒ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ ἔχουν κοινὴν γωνίαν καὶ τὰς γωνίας ΑΒΔ, ΑΕΒ βαινούσας ἐπὶ ἴσων τόξων.



Σχ. 826.

Συνεπῶς,

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{ΒΕ}$$

ἢ

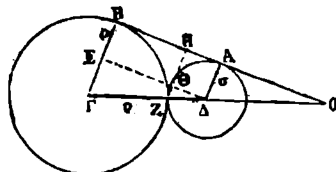
$$ΑΒ^2 = ΑΔ \,.\, ΑΕ.$$

Παρατήρησις. Ἡ πρότασις αὕτη σχετίζεται πρὸς τὴν τῆς § 1294.

Θεώρημα 402

1305. **Τὸ μεταξὺ δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν τμῆμα μιᾶς ἐξωτερικῆς κοινῆς ἐφαπτομένης αὐτῶν εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν διαμέτρων τῶν περιφερειῶν.**

Ἔστωσαν ρ καὶ σ αἱ ἀκτῖνες καὶ τ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.



Σχ. 827.

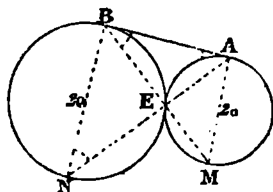
1η Ἀπόδειξις. Ἔχομεν:

$$ΑΒ^2 = ΔΓ^2 - ΓΕ^2 =$$

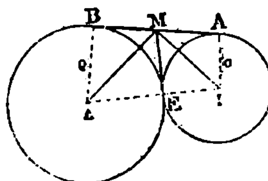
$$= (ρ + σ)^2 - (ρ - σ)^2 = 4ρσ = 2ρ.2σ.$$

2α Ἀπόδειξις. Τὰ ὀρθογώνια καὶ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΝ, ΑΒΜ (Σχ. 828), δίδουν

$$\frac{ΑΒ}{ΑΜ} = \frac{ΒΝ}{ΑΒ} \quad ἢ \quad ΑΒ^2 = ΑΜ \,.\, ΒΝ.$$



Σχ. 828.



Σχ. 829.

3η Ἀπόδειξις. Τὰ τετράπλευρα ΑΜΕΓ, ΒΜΕΔ, (Σχ. 829) εἶναι ὅμοια καὶ

$$ΜΑ = ΜΒ = ΜΕ = \frac{τ}{2}.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΜΓ λαμβάνομεν

$$\frac{τ^2}{4} = ΔΕ \,.\, ΕΓ = ρσ,$$

ἢ

$$τ^2 = 2ρ \,.\, 2σ.$$

Θεώρημα 402—I

1306. Ἡ ἀπόστασις ΖΗ (Σχ. 827), τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν προηγουμένως θεωρηθεισῶν περιφερειῶν ἀπὸ τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένης αὐτῶν, εἶναι ἴση πρὸς

$$\frac{2\rho\sigma}{\rho+\sigma}.$$

Ἔχομεν:

$$ZH = Z\Theta + \sigma$$

$$\frac{Z\Theta}{\Gamma E} = \frac{\Delta Z}{\Delta\Gamma} \quad ἢ \quad \frac{Z\Theta}{\rho-\sigma} = \frac{\sigma}{\rho+\sigma}, \quad Z\Theta = \frac{(\rho-\sigma)\sigma}{\rho+\sigma}.$$

Ἄρα:

$$ZH = Z\Theta + \sigma = \frac{(\rho-\sigma)\sigma}{\rho+\sigma} + \sigma = \frac{2\rho\sigma}{\rho+\sigma}.$$

Θεώρημα 402—II

1307. Ἡ ἀπόστασις ΖΟ τοῦ ἐξωτερικοῦ κέντρου ὁμοιότητος ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Ζ (Σχ. 827), δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$ZO = \frac{2\rho\sigma}{\rho-\sigma}.$$

Ἔχομεν πάλιν:

$$\frac{ZO}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} \quad ἢ \quad ZO = \frac{2\rho\sigma}{\rho+\sigma}\cdot\frac{\rho+\sigma}{\rho-\sigma} = \frac{2\rho\sigma}{\rho-\sigma}.$$

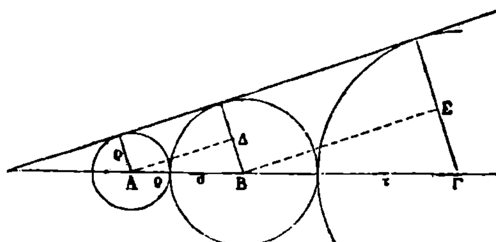
Παρατήρησις. Ἐπίσης:

$$\frac{1}{ZH} + \frac{1}{ZO} = \frac{1}{\sigma}, \quad \frac{1}{ZH} - \frac{1}{ZO} = \frac{1}{\rho},$$

$$\frac{1}{ZH} : \frac{1}{ZO} = \frac{\rho+\sigma}{\rho-\sigma}, \quad \frac{1}{ZH}\ \frac{1}{ZO} = \frac{\rho^2-\sigma^2}{4\rho^2\sigma^2}.$$

Θεώρημα 403

1308. Ἐὰν τρεῖς περιφέρειαι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ ἡ μεσαία ἐφάπτεται τῶν δύο ἄλλων, ἡ ἀκτὶς αὐτῆς εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀκτίνων τῶν δύο ἄλλων.



Σχ. 830.

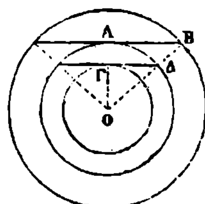
Θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\frac{\tau}{\sigma}=\frac{\sigma}{\rho} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\tau-\sigma}{\tau+\sigma}=\frac{\sigma-\rho}{\sigma+\rho} \quad \text{ἢ} \quad \frac{ΓΕ}{ΓΒ}=\frac{ΒΔ}{ΑΒ}.$$

Ἀλλ' ἡ τελευταία σχέσις εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς ὁμοιότητος τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΓΒΕ.

Θεώρημα 404

1309. Ἐὰν μία περιφέρεια εἶναι περιγεγραμμένη εἰς ἓν κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἐγγεγραμμένη εἰς ἓν ἄλλο, ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον, τὸ μῆκος της εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν μηκῶν τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ἐξωτερικὸν πολύγωνον καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ ἐσωτερικόν.



Σχ. 831

Ἐπειδὴ αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες των, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι

$$ΟΑ^2=ΟΒ\,.\,ΟΓ.$$

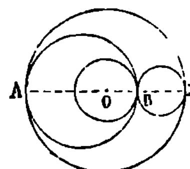
Ἀλλ' εἶναι

$$\frac{ΟΒ}{ΟΔ}=\frac{ΟΑ}{ΟΓ} \quad \text{ἢ} \quad \frac{ΟΒ}{ΟΑ}=\frac{ΟΑ}{ΟΓ}.$$

ἄρα: $$ΟΑ^2=ΟΒ\,.\,ΟΓ.$$

Θεώρημα 404—I

1310. Πᾶσα περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο ἄλλων ὁμοκέντρων εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα ἢ τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν.



Σχ. 832.

Ἔστωσαν ΟΑ = α, ΟΒ = β.

Ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΑΒ εἶναι $\frac{\alpha+\beta}{2}$, ἡ δὲ τῆς μὲ διάμετρον ΒΓ ἴση πρὸς $\frac{\alpha-\beta}{2}$. Ὥστε...

Θεώρημα 404—II

1311. Τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν (ΑΒ) καὶ (ΒΓ), τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἰσοῦται πρὸς τὴν μεγαλυτέραν τῶν δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν πρὸς τὴν μικροτέραν.

Ἐπειδή,

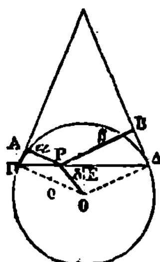
$$\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}=\alpha \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=\beta.$$

Θεώρημα 405

1312. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σταθεροῦ σημείου ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιφερείας, τῶν ἀγομένων εἰς τὰ

ἄκρα μιᾶς τυχούσης χορδῆς διὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ, εἶναι σταθερὰ ποσότης.

Ἔστωσαν $AP=\alpha$, $PB=\beta$, $OP=\delta$, $O\Gamma=\rho$.



Σχ. 833.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΑΡ, ΟΕΓ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ γων. ΟΓΕ = ΑΡΓ· ἄρα:

$$\frac{\Gamma P}{\alpha}=\frac{\rho}{\Gamma E}.$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν ἰσότητα ταύτην διὰ ΓΡ, εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\rho}{\Gamma E}\cdot\frac{1}{\Gamma P}.$$

Ὁμοίως,

$$\frac{1}{\beta}=\frac{\rho}{\Gamma E}\cdot\frac{1}{\Delta P}.$$

Συνεπῶς,

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\rho}{\Gamma E}\left(\frac{1}{\Gamma P}+\frac{1}{\Delta P}\right)=\frac{\rho}{\Gamma E}\cdot\frac{\Delta P+\Gamma P}{\Gamma P\,.\,\Delta P}.$$

Ἀλλ' εἶναι:

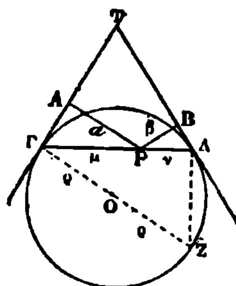
$$\Delta P+P\Gamma=\Delta\Gamma=2\Gamma E \quad \text{καὶ} \quad P\Gamma\,.\,P\Delta=\rho^2-\delta^2.$$

Ἄρα

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\rho}{\Gamma E}\cdot\frac{2\Gamma E}{\rho^2-\delta^2}=\frac{2\rho}{\rho^2-\delta^2},\ \text{σταθερὰ ποσότης.}$$

1312 α. Ἄλλη ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν τριῶν ὀρθογωνίων καὶ ὁμοίων τριγώνων ΡΑΓ, ΡΒΔ, ΓΔΖ, εὑρίσκομεν

$$\frac{\mu}{\alpha}=\frac{\nu}{\beta}=\frac{2\rho}{\mu+\nu},$$



Σχ. 834.

καὶ ἑπομένως,

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{2\rho}{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}\right)=\frac{2\rho}{\mu\nu}=\text{σταθ.}$$

Θεώρημα 406

1313. Ἐὰν δύο ἴσαι περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν χορδῶν, τῶν ὁριζομένων ἐπὶ τυχούσης τεμνούσης, διερχομένης διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων τῶν περιφερειῶν, εἶναι ποσότης σταθερά.

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $ΑΔ^2 + ΑΕ^2$ εἶναι σταθερὰ ποσότης.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΑΒΔ εἶναι ἴσα, ἀφοῦ $ΑΒ = ΑΓ$ καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν ΔΑΒ, ΑΓΕ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς των καθέτους. Συνεπῶς,

$$ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = ΕΓ^2 + ΔΒ^2 = ρ^2,$$

ἤ

$$ΑΜ^2 + ΑΝ^2 = 4ρ^2.$$

Σχ. 835

Θεώρημα 406—Ι

1314. Εἰς περιφέρειαν, φέρομεν διὰ δοθέντος σημείου Α τυχοῦσαν χορδὴν ΒΑΓ. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων τῆς χορδῆς ταύτης, ηὐξημένον κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος.

Φέρομεν χορδὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΟ. Εὑρίσκομεν:

$$ΑΒ \, . \, ΑΓ + ΑΟ^2 = ΑΔ^2 + ΑΟ^2 = ρ^2.$$

Σχ. 836.

Θεώρημα 406—ΙΙ

1315. Εἰς τὸ σχῆμα 836, ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ΡΘ καὶ φέρομεν τὴν ΡΗ. Δείξατε ὅτι

$$ΡΘ^2 + ΡΗ^2 = \frac{1}{2} ΕΖ^2.$$

Πράγματι,

$$ΡΗ^2 = ΡΟ^2 + ρ^2,$$

$$ΡΘ^2 = ΡΕ \, . \, ΡΖ = ρ^2 - ΡΟ^2.$$

Ἄρα:

$$ΡΗ^2 + ΡΘ^2 = 2ρ^2 \quad ἤ \quad \frac{1}{2} ΕΖ^2.$$

Θεώρημα 407

1316. Ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΒΓ τέμνῃ τὴν διάμετρον κατὰ γωνίαν 45°, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς $2ρ^2$.

Σχ. 837.

Ἐπειδή,

$$ΑΒ^2 = 2\,ΒΔ^2 = 2\,ΓΖ^2,$$

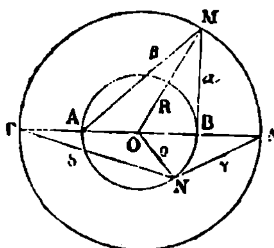
$$ΒΓ^2 = \qquad 2\,ΓΕ^2$$

καὶ

$$ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 2\,ΓΟ^2 = 2\,ρ^2.$$

Θεώρημα 407—I

1317. Ἐὰν δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμόκεντροι, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς μιᾶς ἀπὸ τῶν ἄκρων διαμέτρου τῆς ἄλλης ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διπλασίων τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τῶν δύο περιφερειῶν.



Σχ. 838.

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν

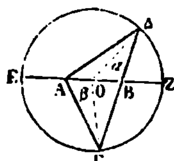
$\alpha^2+\beta^2=2R^2+2OA^2=2R^2+2\rho^2$.

Ὁμοίως, ἐκ τοῦ τριγώνου ΓΝΔ:

$\gamma^2+\delta^2=2\rho^2+2O\Gamma^2=2\rho^2+2R^2$.

Θεώρημα 407—II

1318. Ἐπὶ διαμέτρου περιφερείας λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α, Β, συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον, καὶ φέρομεν διὰ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, Β, τυχοῦσαν χορδὴν ΓΒΔ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΑΔ καὶ ΓΔ εἶναι σταθερὰ ποσότης. (Compagnon, n° 269).



Σχ. 839

Ἔχομεν:

$$A\Delta^2+B\Delta^2=2\alpha^2+2\beta^2,$$

$$A\Gamma^2+B\Gamma^2=2\alpha^2+2\beta^2,$$

καὶ $$2\Delta B\,.\,B\Gamma=2BE\,.\,BZ=2(\alpha^2-\beta^2).$$

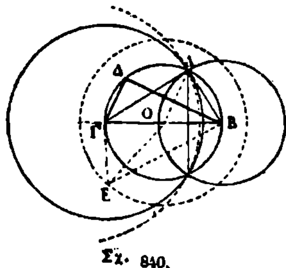
Ἄρα:

$$A\Delta^2+A\Gamma^2+(B\Delta+B\Gamma)^2=A\Delta^2+A\Gamma^2+B\Gamma^2=6\alpha^2+2\beta^2=2(3\alpha^2+\beta^2),$$

ποσότης σταθερά.

Θεώρημα τοῦ Faure 408

1319. Δίδονται δύο περιφέρειαι τεμνόμεναι ὀρθογωνίως καὶ θεωροῦμεν τὴν περιφέρειαν, τὴν διερχομένην διὰ τῶν κέντρων καὶ τῶν κοινῶν αὐτῶν σημείων. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας ταύτης πρὸς τὰς δύο δοθείσας εἶναι μηδέν. (H. Faure, N.A., 1868, σ. 240, ζήτ. 887).



Σχ. 840.

Ἡ *δύναμις σημείου* πρὸς δοθεῖσαν περιφέρειαν εἶναι ἴση πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας.

Ἐπομένως,

$$\Delta^{\Delta}_{(B)} = \text{Δύναμις τοῦ Δ πρὸς τὴν περιφέρειαν (B)} = \Delta B^2 - AB^2,$$

$$\Delta^{\Delta}_{(\Gamma)} = \text{Δύναμις τοῦ Δ πρὸς τὴν περιφέρειαν (Γ)} = \Delta\Gamma^2 - A\Gamma^2.$$

καὶ

$$\Delta^{\Delta}_{(B)} + \Delta^{\Delta}_{(\Gamma)} = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 - (AB^2 + A\Gamma^2) = 0,$$

ἀφοῦ,

$$\Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 = B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2,$$

ὡς ἐκ τῆς ὀρθογωνιότητος τῶν περιφερειῶν (B) καὶ (Γ).

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ γενικοῦ τῆς § 1321.

Θεώρημα 408—I

1320. **Διὰ πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας μὲ κέντρον τὸ μέσον Ο τῆς ΒΓ καὶ ἀκτῖνα τυχοῦσαν (Σχ. 840), τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων αὐτοῦ πρὸς τὰς δύο καθέτως τεμνομένας περιφερείας εἶναι σταθερὰ ποσότης.**

Τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τοῦ σημείου Ε λ. χ. εἶναι

$$\Delta^{E}_{(B)} + \Delta^{E}_{(\Gamma)} = EB^2 - AB^2 + E\Gamma^2 - A\Gamma^2.$$

Ἀλλ' ἔχομεν:

$$EB^2 + E\Gamma^2 = 2\,OE^2 + 2\,\Gamma O^2, \quad A\Gamma^2 + AB^2 = 4\,\Gamma O^2.$$

Ἄρα:

$$\Delta^{E}_{(B)} + \Delta^{E}_{(\Gamma)} = 2\,EO^2 - 2\,\Gamma O^2,$$

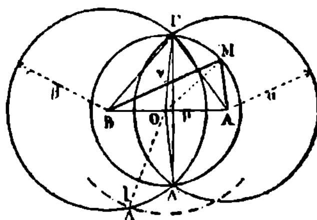
ποσότης σταθερά.

1320 α. ***Σημείωσις.*** Ἡ ὀνομασία *δύναμις σημείου* πρὸς μίαν περιφέρειαν ὀφείλεται εἰς τὸν Steiner (*Journal de Crelle,* τόμ. 1, σ. 164, Baltzer).

Θεώρημα 408—II

1321. Δίδονται δύο περιφέρειαι μὲ κέντρα Α καὶ Β, τεμνόμεναι κατὰ κοινὴν χορδὴν ΓΔ. Μὲ κέντρον τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Γ καὶ Δ.

Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τοῦ τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας ταύτης πρὸς τὰς δύο δοθείσας περιφερείας εἶναι μηδέν.



Σχ. 841.

Ἔστωσαν ΟΑ=ΟΒ=μ, ΟΓ=ν καὶ α, β αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν (Α) καὶ (Β). Τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας (Ο) πρὸς τὰς περιφερείας (Α) καὶ (Β) εἶναι

$$\Delta^{M}_{(A)} + \Delta^{M}_{(B)} = MA^2 - \alpha^2 + MB^2 - \beta^2.$$

'Αλλ' εἶναι

$$MA^2 + MB^2 = 2\nu^2 + 2\mu^2 = \Gamma A^2 + \Gamma B^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

ἤ

$$MA^2 - \alpha^2 + MB^2 - \beta^2 = 0.$$

1321 α. Παρατήρησις. Ἡ περιφέρεια (Ο), διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων παντὸς σημείου αὐτῆς πρὸς τὰς (Α) καὶ (Β) εἶναι δοθὲν τετράγωνον κ^2, ἔχει ἀκτῖνα ΟΛ $= \lambda$, τὴν ὁριζομένην ἐκ τῆς σχέσεως

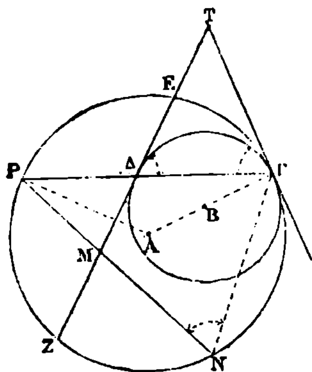
$$2\mu^2 + 2\lambda^2 - \alpha^2 - \beta^2 = \kappa^2,$$

δηλ. τὴν

$$\lambda = \sqrt{\frac{\kappa^2 + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \mu^2}$$

Θεώρημα 408—III

1322. Δίδονται σημεῖον σταθερὸν Ρ, περιφέρεια (Β) καὶ ἐφαπτομένη ΔΤ αὐτῆς. Διὰ τοῦ σημείου Ρ φέρομεν εὐθεῖαν τυχοῦσαν ΡΜ, συναντῶσαν τὴν ἐφαπτομένην εἰς Μ, καὶ ἐπὶ ταύτης λαμβάνομεν σημεῖον Ν τοιοῦτον, ὥστε τὸ γινόμενον ΡΜ . ΡΝ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν δύναμιν τοῦ Ρ πρὸς τὴν περιφέρειαν (Β). Δείξατε ὅτι ὁ τόπος τοῦ σημείου Ν εἶναι περιφέρεια, διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ ἐφαπτομένη τῆς (Β).



Σχ. 842.

Ἂς φέρωμεν τὴν ΡΔΓ. Θὰ ἔχωμεν :

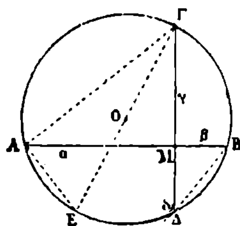
$$\Delta^{P}_{(B)} = P\Delta \, . \, P\Gamma = PM \, . \, PN,$$

δηλ. τὸ τετράπλευρον ΔΜΝΓ θὰ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν καὶ γων. $\widehat{N} = \widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$. Ὁ τόπος, ἑπομένως, τοῦ σημείου Ν εἶναι ἡ περιφέρεια ΡΓΝ, ἐφαπτομένη τῆς (Β) εἰς Γ.

Παρατήρησις. Τὸ στοιχειῶδες τοῦτο θεώρημα ὁδηγεῖ εἰς μίαν ὡραίαν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Feuerbach (Βλ.ἐπμ.§ 1341).

Θεώρημα 408—IV

1323. Διὰ τυχόντος σημείου Μ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κύκλου, φέρομεν δύο χορδὰς καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων τμημάτων των εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.



Σχ. 843.

$$\alpha^2 + \gamma^2 = A\Gamma^2, \quad \beta^2 + \delta^2 = B\Delta^2,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2.$$

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΓΟΕ. Ἐπειδὴ αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΓΑΕ, ΒΜΔ ἔχουν ὡς μέτρα

$$\frac{\text{ἥμισυ περιφερείας}}{2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\widehat{\Gamma A}+\widehat{AE}}{2}, \text{ ἀντ.,} \quad \frac{\widehat{\Gamma A}+\widehat{B\Delta}}{2},$$

ἕπεται ὅτι

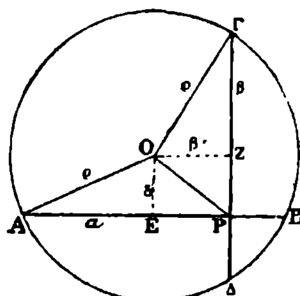
$$\widehat{AE}=\widehat{B\Delta} \quad \text{καὶ} \quad AE=B\Delta.$$

Συνεπῶς,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=A\Gamma^2+B\Delta^2=A\Gamma^2+AE^2=(2\rho)^2.$$

1324. Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα ἀληθεύει δι' οἱανδήποτε θέσιν τοῦ σημείου Μ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου· ἀλλ' ἐὰν τὸ σημεῖον εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, θὰ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν τῶν τετραγώνων ὁλοκλήρων τῶν τεμνουσῶν διὰ τοῦ Μ ἀπὸ τῶν τετραγώνων τῶν ἐξωτερικῶν τοῦ κύκλου τμημάτων αὐτῶν.

Θεώρημα 409



Σχ. 844.

1325. Ἐὰν ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Ρ φέρωμεν πρὸς δοθεῖσαν περιφέρειαν (Ο) δύο τυχούσας τεμνούσας ΑΒ, ΓΔ, καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων $AB^2+\Gamma\Delta^2$, τῶν ἐσωτερικῶν τοῦ κύκλου μερῶν αὐτῶν, εἶναι σταθερὰ ποσότης. (Ἀρχιμήδης).

Θὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν πορείαν, τὴν ὑποδειχθεῖσαν εἰς τὰς *Μεθόδους*, (§ 30).

1η Περίπτωσις. Τὸ σημεῖον Ρ *εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου* (Ο).

Ἔστωσαν α καὶ β τὰ ἡμίση τῶν μηκῶν τῶν ὀρθογωνίων χορδῶν, ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ α', β' αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῶν δύο χορδῶν. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι

$$4\alpha^2+4\beta^2=\sigma\tau.$$

Ἔχομεν

$$\alpha^2=\rho^2-\alpha'^2,\quad \beta^2=\rho^2-\beta'^2$$

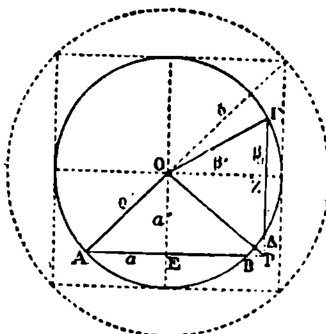
καὶ $\alpha^2+\beta^2=2\rho^2-(\alpha'^2+\beta'^2)$

$$=2\rho^2-(OP)^2,$$

ἀφοῦ

$$\alpha'^2+\beta'^2=OE^2+EP^2=OP^2,$$

ποσότης σταθερά.



Σχ. 845.

1326. 2α Περίπτωσις. Τὸ σημεῖον Ρ *εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου* (Σχ. 845).

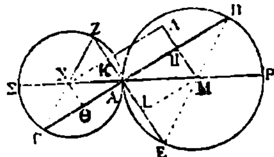
Θὰ εἶναι τότε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\rho^2 - (\alpha'^2 + \beta'^2) = 2\rho^2 - (OP)^2.$$

Παρατήρησις. OP^2 δύναται νὰ εἶναι ἴσον τὸ πολὺ πρὸς $2\rho^2$ ἢ δ^2. Θὰ πρέπει, ἑπομένως, τὸ σημεῖον P νὰ ἀπέχῃ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν OP τὸ πολὺ ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου δ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἐξ αὐτοῦ ζεῦγος τεμνουσῶν τὴν περιφέρειαν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας.

Θεώρημα 409—I

1327. Διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Α δύο ἐξωτερικῶς ἐφαπτομένων περιφερειῶν φέρομεν δύο τυχούσας τεμνούσας αὐτῶν ΓΑΒ, ΕΑΖ καθέτους πρὸς ἀλλήλας. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαμέτρων τῶν περιφερειῶν.



Σχ. 846.

Φέρομεν τὴν ΝΛ, παράλληλον πρὸς τὴν ΘΗ. Θὰ ἔχωμεν

$$N\Lambda = \frac{1}{2}\Gamma AB,$$

$$M\Lambda = \frac{1}{2}EZ, \quad MN = \frac{1}{2}P\Sigma,$$

καὶ $$MN^2 = N\Lambda^2 + M\Lambda^2.$$

Ἄρα $$P\Sigma^2 = B\Gamma^2 + EZ^2.$$

Θεώρημα 409—II

1328. Εἰς τὸ ἴδιον σχῆμα (846), τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων τμημάτων ἐπὶ τῶν δύο ὀρθογωνίων τεμνουσῶν, εἶναι ποσότης σταθερά.

Ἐπειδή,

$$AH^2 + AI^2 = AM^2, \quad AK^2 + A\Theta^2 = AN^2,$$

καὶ $$AB^2 + AE^2 = 4AH^2 + 4AI^2 = AP^2,$$

$$A\Gamma^2 + AZ^2 = 4AK^2 + 4A\Theta^2 = A\Sigma^2.$$

Ἄρα $$AB^2 + A\Gamma^2 + AE^2 + AZ^2 = AP^2 + A\Sigma^2,$$

ἢ καὶ $$(AB^2 + AE^2) + (A\Gamma^2 + AZ^2) = BE^2 + \Gamma Z^2 = 4(\rho^2 + \rho'^2).$$

Παρατήρησις. Αἱ σχέσεις αὗται (§§ 1327, 1328), εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ἐκείνας τῆς § 1325.

Θεώρημα τοῦ Fermat 410

1329. Ἔστω ΑΒΓΔ ὀρθογώνιον διὰ τὸ ὁποῖον $AB = B\Gamma \cdot \sqrt{2}$, Ε τυχὸν σημεῖον τῆς ἡμιπεριφερείας μὲ διάμετρον ΑΒ, Ζ καὶ Θ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ΕΔ καὶ ΕΓ μετὰ τῆς ΑΒ.

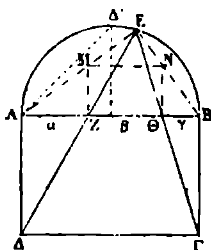
Δείξατε τὴν σχέσιν:

$$A\Theta^2 + BZ^2 = AB^2.$$

(Fermat. Ζήτημα 957, N. A., 1869, σ. 479 καὶ 1870, σ. 189).

Ἔστω: $AZ = \alpha, \quad Z\Theta = \beta, \quad B\Theta = \gamma.$

Θὰ ἐπαληθεύσωμεν τὴν δεικτέαν σχέσιν, ἀντικαθιστῶντες ἕκαστον μῆκος εἰς αὐτὴν διὰ ἴσου του συναρτήσει τῶν α, β, γ. Ἀναγόμεθα εἰς τὴν



Σχ. 847.

$$(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2, \quad (1)$$

ἥτις ἀληθεύει ἐὰν

$$\beta^2 = 2\alpha\gamma. \quad (2)$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς σχέσεως ταύτης, παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων τοῦ σχήματος λαμβάνομεν τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν

$$\frac{ZM}{A\Delta}=\frac{EZ}{E\Delta}=\frac{E\Theta}{E\Gamma}=\frac{\Theta N}{B\Gamma}=\frac{Z\Theta}{\Delta\Gamma},$$

ἐξ ἧς ἕπεται $ZM = N\Theta$ καὶ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΘΖΜΝ εἶναι ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ. Εἶναι ἄρα

$$Z\Theta^2 = \beta^2 = 2(MZ)^2.$$

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ἀφ' ἑτέρου, ΑΜΖ καὶ ΝΒΘ εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{MZ}=\frac{N\Theta}{\gamma}\cdot$$

συνεπῶς

$$\alpha\gamma = \Theta N \,.\, MZ = MZ^2 = \frac{\beta^2}{2}\cdot$$

ἢ

$$\beta^2 = 2\alpha\gamma.$$

Εἶναι, ἑπομένως, ἀληθὴς ἡ συνθήκη (2), ἄρα καὶ ἡ συνέπεια αὐτῆς (1).

Ἀντίστροφα σχήματα

1330. Ὁρισμός. Δύο σημεῖα Μ, Ν λέγονται *ἀντίστροφα* ἀλλήλων πρὸς *πόλον* ἢ *ἀρχὴν* Ο καὶ *δύναμιν ἀντιστροφῆς* K^2, ἐὰν εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μετὰ τοῦ Ο καὶ τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων ΟΜ. ΟΝ εἶναι ἴσον πρὸς K^2 ([78]).

Δύο σχήματα λέγονται ἀντίστροφα ἀλλήλων, ἐὰν ἕκαστον αὐτῶν εἶναι ὁ τόπος τῶν ἀντιστρόφων, πρὸς δοθέντα πόλον καὶ δύναμιν ἀντιστροφῆς, τῶν σημείων τοῦ ἄλλου.

Θεώρημα 411

***1330 α.* Δύο ζεύγη ἀντιστρόφων σημείων ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.**

(*Μέθοδοι*, § 218).

---

78. Σημ. μετ. Βλέπε Εἰσαγωγικὸν σημείωμα.

Θεώρημα 412

1331. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι δύο σημεῖ· Μ, Ν καὶ τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν Μ', Ν' εἶναι ἀντιπαράλληλοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΟΜΜ' καὶ ΟΝΝ'.

(*Μέθοδοι*, § 218).

Θεώρημα 413

1332. Τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος Μ'Ν' εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους ΜΝ ἐπὶ τὴν δύναμιν ἀντιστροφῆς, διαιρεθὲν διὰ τοῦ γινομένου ΟΜ. ΟΝ, τῶν ἀκτίνων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος.

(*Μέθοδοι*, § 219).

Θεώρημα 414

1333. Ἡ γωνία δύο γραμμῶν δοθέντος σχήματος εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῶν ἀντιστρόφων των γραμμῶν εἰς τὸ ἀντίστροφον σχῆμα.

(*Μέθοδοι*, § 221).

Θεώρημα 415

1334. Τὸ ἀντίστροφον περιφερείας, πρὸς πόλον ἐπ' αὐτῆς κείμενον, εἶναι εὐθεῖα γραμμή, κάθετος ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ πόλου διάμετρον.

(*Μέθοδοι*, § 223).

Θεώρημα 416

1335. Τὸ ἀντίστροφον εὐθείας, μὴ διερχομένης διὰ τοῦ πόλου, εἶναι περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ πόλου. Ἡ διὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ διάμετρος αὐτῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

(*Μέθοδοι*, § 224).

Θεώρημα 417

1336. Τὸ ἀντίστροφον περιφερείας, πρὸς πόλον μὴ κείμενον ἐπ' αὐτῆς, εἶναι περιφέρεια ὁμοιόθετος τῆς δοθείσης, πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸν πόλον τῆς ἀντιστροφῆς.

(*Μέθοδοι*, § 225).

Θεώρημα 417—Ι

1337. Ἁρμονικὸν τετράπλευρον. Ἐὰν τὰ γινόμενα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου εἶναι ἴσα, πᾶσα εὐθεῖα τέμνει τὴν τετράδα εὐθειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τυχόντος σημείου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου, κατ' ἁρμονικὴν τετράδα σημείων.

(*Μέθοδοι*, § 227).

Θεώρημα 418

1338. Δύο περιφέρειαι, μὴ τεμνόμεναι, μετασχηματίζονται δι' ἀντιστροφῆς εἰς ὁμοκέντρους περιφερείας, ἐὰν ὡς πόλος ἐκλεγῇ ἓν ἐκ τῶν ὁριακῶν σημείων.

(*Μέθοδοι*, § 233).

Θεώρημα 418—I

1339. Δύο περιφέρειαι τεμνόμεναι μετασχηματίζονται εἰς ἴσας περιφερείας, ἐὰν ληφθῇ ὡς πόλος ἀντιστροφῆς ἓν τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτομούσης αὐτὰς περιφερείας.

(*Μέθοδοι*, § 235).

Θεώρημα 418—II

1340. Μεταξὺ δύο περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), μὴ ὁμοκέντρων, ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς ἄλλης, ἐγγράφομεν περιφέρειαν (Γ) ἐφαπτομένην αὐτῶν, ὕστερον ἄλλην (Δ) ἐφαπτομένην τῶν (Α), (Β) καὶ (Γ), ἄλλην (Ε) ἐφαπτομένην τῶν (Α), (Β), (Δ) κ.ο.κ.

1) Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν (Γ), (Δ), (Ε)... κεῖνται ἐπὶ περιφερείας.

2) Ἐὰν ἡ περιφέρεια (Ν) εἶναι ἡ τελευταία τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς περιφερειῶν (Γ), (Δ)... κλπ. (Βλ. *Μέθοδοι*, n° 237).

Θεώρημα 418—III

1340 α. Δίδονται γωνία ΧΟΥ καὶ περιφέρεια ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὴν (Ι). Μία τυχοῦσα ἐφαπτομένη ΑΒ τῆς περιφερείας (Ι) ὁρίζει τρίγωνον ΑΟΒ, τοῦ ὁποίου ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια ἐφάπτεται σταθερᾶς περιφερείας, οἱασδήποτε οὔσης τῆς ἐφαπτομένης ΑΒ (Mannheim).

Ὑπάρχουν δύο τοιαῦται σταθεραὶ περιφέρειαι, ἐγγεγραμμέναι ἀμφότεραι εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν. Ἡ πρώτη ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ περιφέρεια (Ι) εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΟΒ καὶ ἡ δευτέρα εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ (Ι) εἶναι παρεγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον.

Βλέπε: Catalan, *Théorèmes et Problèmes*, 6η ἔκδ., σ. 162 ἕως 164, XCVI καὶ XCVII.— Desboves, *Questions de Géométrie*, 2α ἔκδ., σ. 244, nos 97 καὶ 98.— *Bulletin des Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires*, 10ον ἔτος, σ. 89, n° 1505 καὶ 13ον ἔτος, σ. 290 καὶ 291.

Θεώρημα τοῦ Feuerbach 419

1341. Εἰς τρίγωνον, ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων ἐφάπτεται τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν.

1η Ἀπόδειξις. Διὰ τῆς ἀντιστροφῆς (*Μέθοδοι*, § 238).

2α Ἀπόδειξις. (Milne).

Ἔστωσαν Ι, J τὰ κέντρα τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας καὶ μιᾶς τῶν παρεγγεγραμμένων, Ρ', Σ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μετὰ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ΖΔΕ τὸ τρίγωνον τῶν μέσων τῶν πλευρῶν καὶ ΘΗ ἡ συμμετρικὴ τῆς ΒΓ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν (Ι) καὶ (J).

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΘ, ἡ διχοτόμος ΑΙ καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΕ, τῶν μέσων τῶν ΓΑ, ΓΒ, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Κ. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι:

$$\mathrm{BP}' = \Gamma\Sigma, \quad \mathrm{P}'\Sigma = \mathrm{AB} - \mathrm{A}\Gamma$$

καὶ

$$\Delta\mathrm{P}' = \Delta\Sigma = \frac{\mathrm{AB} - \mathrm{A}\Gamma}{2} = \frac{\mathrm{B}\Theta}{2} = \Delta\mathrm{K}.$$

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΔΚΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$\frac{ΔΛ}{ΔΚ} = \frac{ΒΘ}{ΒΑ} = \frac{ΔΚ}{ΔΕ},$$

ἐξ ὧν ἕπονται αἱ ἰσότητες

$$ΔΛ \,.\, ΔΕ = ΔΚ^2 = ΔΡ'^2 = ΔΣ^2.$$

Ὁμοίως, εὑρίσκομεν

$$ΔΜ \,.\, ΔΖ = ΔΚ^2 = ΔΡ'^2 = ΔΣ^2.$$

Ἐπειδὴ τὰ γινόμενα ΔΛ . ΔΕ, ΔΜ . ΔΖ εἶναι ἴσα πρὸς τὰς δυνάμεις τοῦ σημείου Δ πρὸς τὰς περιφερείας (Ι) καὶ (J), τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἀντίστροφα τῶν Λ

Σχ. 848.

καὶ Μ ἐν τῇ ἀντιστροφῇ μὲ πόλον Δ καὶ δύναμιν $ΔΣ^2 = ΔΡ'^2$. Κεῖνται κατὰ συνέπειαν τὰ σημεῖα ταῦτα ἐπὶ τῆς, ἀντιστρόφου τῆς εὐθείας ΘΜΛΗ, περιφερείας ΔΕΖ, δηλ. τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΘΜΛΗ εἶναι ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν (Ι) καὶ (J), τὸ ἀντίστροφον αὐτῆς, δηλ. ἡ περιφέρεια ΔΕΖ, θὰ ἐφάπτεται τῶν ἀντιστρόφων σχημάτων τῶν περιφερειῶν τούτων. Εἶναι δὲ τὰ ἀντίστροφα ταῦτα σχήματα αἱ ἴδιαι περιφέρειαι (Ι) καὶ (J), ἐφ' ὅσον ὡς δύναμις ἀντιστροφῆς ἐλήφθη ἡ δύναμις τοῦ πόλου Δ πρὸς τὰς δύο περιφερείας.

Ἐφάπτεται, ἑπομένως, ἡ περιφέρεια ΔΕΖ τῶν περιφερειῶν (Ι) καὶ (J), ὡς καὶ τῶν δύο ἄλλων παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν.

Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ω καὶ V εἶναι αἱ τομαὶ τῶν (Ι) καὶ (J) πε-

ριφερειῶν μετὰ τῶν εὐθειῶν τῶν ἑνουσῶν τὸ σημεῖον Δ μετὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς Σ', Ρ τῆς εὐθείας ΘΗ.

Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ω, V, V', V'', τῆς περιφερείας ΔΕΖ μετὰ τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὸ τρίγωνον, ὠνομάσθησαν *σημεῖα τοῦ Feuerbach*.

1341 α. Σημείωσις. Τὸ *θεώρημα τοῦ Feuerbach* ἐγνώσθη τὸ 1822. (I. d. M., 1902, σ. 30, n° 2145. Σημείωσις τοῦ Brocard).

Ἡ πρότασις αὕτη, ἀποδειχθεῖσα κατὰ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Hamilton καὶ ὕστερον (1865) ὑπὸ τοῦ Gerono (N. A., 1903, σ. 13), δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ κατὰ πολλοὺς ἄλλους τρόπους· ἡ κομψοτέρα πάντως εἶναι ἡ διὰ τῆς χρήσεως τῆς ἀντιστροφῆς καὶ ὀφείλεται εἰς τὸν J. P. Taylor (I. d. M., 1900, σ. 314, n° 1544), μολονότι ἀποδίδεται πολλάκις καὶ εἰς τὸν Milne (J. M. E., 1890, σ. 3). Ἡ ἀπόδειξις αὕτη εὑρίσκεται καὶ εἰς τὸ *Traité de Géométrie élémentaire* τῶν Rouché καὶ Comberousse.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Baltzer (*Elemente der Mathematik*, *Ἐπιπεδομετρία*, § 12, n° 8), ἂν καὶ ἁπλῆ, εἶναι ἀρκετὰ μακρά.

Εἰς διάφορα ἄρθρα τῶν *N. Annales mathématiques* ἐξετάζεται τὸ *θεώρημα τοῦ Feuerbach*· ὁ J. Mention ἐκθέτει εἰς τοὺς τόμους τοῦ 1846, σ. 403 καὶ 1850, σ. 101 δύο ἀποδείξεις. Ὁ σοφὸς συντάκτης, κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτήν, τῶν *Annales*, Gerono, ἐξέθεσεν τὸν τρόπον τῆς κατασκευῆς τῶν σημείων ἐπαφῆς τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων μετὰ τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν, διὰ τῆς χρήσεως μόνον τοῦ κανόνος καὶ χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν οὐδεμιᾶς περιφερείας (1865, σ. 220). Ὁ Lemoine ἐξέθεσε ἐπίσης μίαν πολὺ ἁπλῆν κατασκευὴν τῶν *σημείων τοῦ Feuerbach* (A. F., 1891, Marseille, σ. 136), ὁ δὲ Cannon (Mannheim) δίδει μίαν πολὺ σύντομον καὶ κομψὴν ἀπόδειξιν εἰς *Nouvelles Annales* (1902, σ. 500 καὶ 1905, σ. 257).

Ἀναφέρομεν ἐπίσης τὴν εἰς τὸ ἴδιον περιοδικὸν *παρατήρησιν* (1903, σ. 183, καὶ 1905, σ. 260) τοῦ Fontené, καθὼς καὶ ἓν ὡραῖον ἄρθρον τοῦ ἰδίου εἰς τὸ *Bulletin* τῶν Gerard καὶ Michel (1906, σ. 113). Ὁ Fontené ἐγενίκευσε ἐπίσης τὸ *Θεώρημα τοῦ Feuerbach* (N. A., 1905, σ. 52 καὶ 1906, σ. 55 ἕως 63), ὡς καὶ τὸ θεώρημα ἐπὶ τῆς *εὐθείας τοῦ Simson* (N. A., 1906, σ. 145).

Καὶ ὁ E. Weber ἐγενίκευσε καὶ αὐτὸς τὸ *θεώρημα τοῦ Feuerbach* εἰς τὸ ἄρθρον του: *Sur quelques cercles du plan d'un triangle* (N. A., 1906, σ. 343). Βλ. ἐπίσης διάφορα ἄρθρα τῶν Vacquant, Fontené, Bouvaist εἰς N. A., 1906, σ. 392, 508, 510 καὶ 1907, σ. 158.

Εἰς τὸ J. d. M. E. et Sp. (1879, σ. 359), ὑπάρχει ἡ ἀπόδειξις τοῦ James Booth, ἀνάλογος τῆς τοῦ Mention καὶ βασιζομένη ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τῶν ἐννέα σημείων.

Σχετικὰ πρὸς τὸ *θεώρημα τοῦ Feuerbach* εὑρίσκονται ἀκόμη καὶ εἰς: J. M. E. et Sp., 1886, σ. 3, 1890, σ. 193, 1895, σ. 83.—I. d. M., 1902, σ. 30, n° 2145 (διὰ τὸ ἱστορικὸν τοῦ θεωρήματος, τοῦ Brocard).— *Mathesis*, 1908, σ. 33.— *Educational Times*, Ἰούλιος 1908 καὶ *Mathesis*, 1908, σ. 201, ἐπὶ τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων.— N. A., 1909, σ. 1 καὶ 33, Rem., III, ὅπου ὁ G. Fontené θεωρεῖ τὴν περιφέρειαν τῶν ἐννέα σημείων ὡς μίαν τῶν κωνικῶν τομῶν, τῶν ἀναφερομένων εἰς ἓν τρίγωνον.

Καλεῖται *σημεῖον τοῦ Feuerbach*, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας—

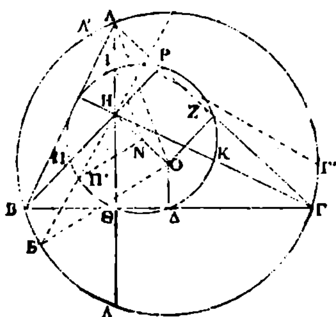
καὶ τὸ αὐτὸ ὄνομα θὰ ἠδυνάμεθα νὰ προσδώσωμεν καὶ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς πρώτης περιφερείας καὶ ἑκάστης τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὸ τρίγωνον.

Τῆς *ὑπερβολῆς τοῦ Feuerbach* (§ 1242, ξ) κέντρον εἶναι τὸ *σημεῖον τοῦ Feuerbach*.

Θεώρημα 419—I

1341 β. *Ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς πάντα τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὀρθόκεντρον καὶ τὴν αὐτὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν μετὰ τοῦ δοθέντος τριγώνου.*

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἁπλῆ συνέπεια ἐκείνης τῆς § 130, 2).



Σχ. 843 α

Ἕνεκα τοῦ ἐνδιαφέροντος τὸ ὁποῖον παρουσιάζει θὰ δώσωμεν μερικὰς ἀναπτύξεις:

Τὸ κέντρον Ν τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΟΗ, ἡ δὲ ἀκτὶς αὐτῆς ΝΙ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ. Τὸ Η, συνεπῶς, εἶναι τὸ κέντρον ὁμοιότητος τῶν δύο περιφερειῶν (Ν) καὶ (Ο) (§ 1261) καὶ πᾶσα εὐθεῖα, ὡς ἡ ΗΒ ἢ ΗΒ', διαιρεῖται εἰς δύο μέρη ἴσα, εἰς τὰ Π, Π', ὑπὸ τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ σημεῖα Ι, Π, Κ εἶναι τὰ *σημεῖα τοῦ Euler* ἐπὶ τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ σημεῖα Π' κλπ. θὰ εἶναι τὰ ὅμοια σημεῖα ἑνὸς ἄλλου τριγώνου Α'Β'Γ', ἔχοντος ὀρθόκεντρον τὸ αὐτὸ Η μετὰ τοῦ ΑΒΓ καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν Ο. Τὸ νέον, ἄρα, τρίγωνον τοῦτο Α'Β'Γ' ἔχει τὸν αὐτὸν κύκλον τῶν ἐννέα σημείων μετὰ τοῦ ἀρχικοῦ ΑΒΓ.

Ἡ περιφέρεια (Ν) περιέχει πάντας τοὺς ἐγγεγραμμένους κύκλους καὶ ἐφάπτεται αὐτῶν, ὡς καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν.

Παρατήρησις. Τὸ *θεώρημα τοῦ Hamilton* (§ 1341 δ), ὁδηγεῖ εἰς μίαν δευτέραν γενίκευσιν, ἀφοῦ τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΗΓ, ΒΗΑ, ΓΗΒ καὶ ΑΒΓ ἔχουν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν τῶν ἐννέα σημείων καὶ ἕκαστον αὐτῶν ἔχει ἐγγεγραμμένην καὶ παρεγγεγραμμένας περιφερείας διακεκριμένας ἀπ' ἀλλήλων.

1341 γ. 1) Τὸ ἀνωτέρω ζήτημα ἐτέθη εἰς τὸ *Int. d. M.* (1909, σ. 163 καὶ 178, n° 3304). Σχετικῶς ἀπήντησεν ὁ N. Placowo καὶ ὑποδεικνύει, χρησιμοποιῶν τὸ σχῆμα 433 τῆς § 733, ὅτι ὁ κύκλος τῶν ἐννέα σημείων ἐφάπτεται 48 ἄλλων κύκλων.

2) Ἡ ἀκτὶ ρ' τῆς περιφερείας, ἥτις ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τρίγωνον, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\rho' = \frac{\rho^2 + \tau^2}{4\rho}.$$

(*I. d. M.*, 1901, σ. 119, n° 1930. Stoll).

Θεώρημα τοῦ Hamilton 419—ΙΙ

1341 δ. Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ. Τὰ τρίγωνα μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Η, ἀνὰ τρία λαμβανόμενα, ἔχουν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν τῶν ἐννέα σημείων.

Ἡ περιφέρεια αὕτη ἐφάπτεται τῶν δέκα ἐξ ἐγγεγραμμένων ἢ παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰ τρίγωνα ταῦτα.

(*Μέθοδοι*, § 292 λ).

Θεώρημα 419—ΙΙ α

1342. Αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου τοῦ Feuerbach τριγώνου ΑΒΓ:

1) ἀπὸ τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν εἶναι ἴσαι, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν ἀπὸ τῆς εὐθείας ΟΙ.

2) ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰς ἀποστάσεις τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν ἀπὸ τὰς προβολὰς τῶν κορυφῶν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΙ.

(Thébault, N. A., 1910, σ. 275).

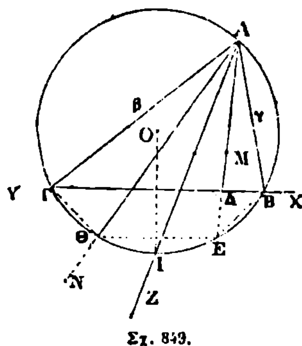
Σημείωσις. 1) Εἰς μίαν ὡραίαν σπουδήν: *Sur quelques théorèmes de Géométrie élémentaire*, ὁ Thébault δίδει μέγαν ἀριθμὸν προτάσεων ἀναφερομένων εἰς τὸ *σημεῖον τοῦ Feuerbach* καὶ τὰς ὁποίας πορίζεται ἐκ γενικωτέρων ἄλλων θεωρημάτων, ἅτινα καὶ ἀποδεικνύει.

2) Τοῦ *θεωρήματος τοῦ Feuerbach*, ὁ Y. Sawayama (Τόκιο) ἔδωσε εἰς N. A. 1911, σ. 31 ἕως 49, ἐννέα ἀποδείξεις. Ὁ ἴδιος εἰς τὴν *Mathesis* (1906, σ. 259) ἐκθέτει καὶ μίαν ἁπλουστάτην καὶ κομψοτάτην ἀπόδειξιν τοῦ *Ἰαπωνικοῦ θεωρήματος* (§ 750 α).

Συμμετρικὴ ἀντιστροφή

Θεώρημα 419—ΙΙΙ

1342 α. Διὰ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν εὐθεῖαν τυχοῦσαν ΑΔ περατουμένην εἰς τὴν βάσιν ΒΓ, ἐπὶ δὲ τῆς συμμετρικῆς αὐτῆς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α λαμβάνομεν τμῆμα ΑΘ τοιοῦτον, ὥστε τὸ γινόμενον ΑΔ . ΑΘ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΓ . ΑΒ = βγ. Δείξατε ὅτι ὁ τόπος τοῦ σημείου Θ εἶναι ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.



Σχ. 849.

Τὰ τρίγωνα ΑΓΘ καὶ ΑΔΒ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν· ἐπειδὴ γων. ΓΑΘ = ΔΑΒ καὶ $\frac{\beta}{A\Delta} = \frac{A\Theta}{\gamma}$, ἀφοῦ β.γ=ΑΔ.ΑΘ. Εἶναι, ἑπομένως, καὶ αἱ γωνίαι ΓΘΑ, ΓΒΑ ἴσαι καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΓΘΒ ἐγγράψιμον.

Τὸ σημεῖον, ἄρα, Θ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιφερείας.

1342 β. Παρατήρησις. Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ σημεῖον Θ εἶναι μεταβλητὸν ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΒΓ, τὸ σημεῖον Δ γράφει τὴν εὐθεῖαν ΒΓ.

Ὁ πούς τοῦ ἐκ τοῦ Α ὕψους καὶ τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς ἐκ τοῦ Α διαμέτρου εἶναι σημεῖα ἀντίστοιχα (ὡς ἀνωτέρω).

1342 γ. Συμμετρικὴ ἀντιστροφή. Τὸ προηγούμενον θεώρημα χρησιμεύει ὡς βάσις διὰ τὴν μέθοδον μετασχηματισμοῦ, τὴν γνωστὴν ὑπὸ τὸ ὄνομα *συμμετρικὴ ἀντιστροφή*. Κατὰ ταύτην, εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τῆς γωνίας Α, ἀντιστοιχίζεται σημεῖον Ν, κείμενον ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς τῆς ΑΜ πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α (καλουμένης ἄξονος τῆς συμμετρικῆς ἀντιστροφῆς) εὐθείας καὶ τοιοῦτον, ὥστε ΑΜ . ΑΝ $= \beta\gamma = \kappa^2$.

1) Τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον σχῆμα εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ *πόλου* Α τῆς συμμετρικῆς ἀντιστροφῆς, εἶναι εὐθεῖα, διερχομένη ἐπίσης διὰ τοῦ πόλου Α.

2) Τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον εὐθείας ΧΥ, μὴ διερχομένης διὰ τοῦ πόλου, εἶναι περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ πόλου.

3) Τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον περιφερείας, διερχομένης διὰ τοῦ πόλου, εἶναι εὐθεῖα (ὡς ἡ ΧΥ).

4) Τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον περιφερείας μὴ διερχομένης διὰ τοῦ πόλου εἶναι περιφέρεια μὴ διερχομένη ἐπίσης διὰ τοῦ πόλου. (Βλέπε επμ. § 1342 ζ). Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι γνωστὴ διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ σημεῖα Μ, Ν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΜΝ ([79]). Ἡ συμμετρικὴ τῆς λαμβανομένης περιφερείας πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α εἶναι ὁ τόπος τῶν συμμετρικῶν ἀντιστρόφων τῶν σημείων Μ.

Πρόβλημα 419—IV

1342 ε. Δίδεται ὁ πόλος Α, ὁ ἄξων ΑΖ καὶ ἡ δύναμις κ^2. Νὰ εὑρεθῇ

Σχ. 850.

τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον σχῆμα 1) μιᾶς περιφερείας διερχομένης διὰ τοῦ πόλου Α, 2) μιᾶς εὐθείας ΧΥ.

79. Σημ. μετ. Ἐπειδὴ τότε τὰ σημεῖα Ν κεῖνται ἐπὶ τῆς ἀντιστρόφου (§ 1330 κλπ.) περιφερείας τῆς δοθείσης πρὸς πόλον Α.

1) Τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον σχῆμα τῆς περιφερείας εἶναι εὐθεῖα καὶ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν η τοῦ πόλου ἀπὸ τῆς εὐθείας ἴσον πρὸς κ^2 (§ 1342 α). Διὰ τὴν κατασκευήν της, λαμβάνομεν τμῆμα ΑΛ ἐπὶ τῆς ΔΑ (Σχ. 850) ἴσον πρὸς $\frac{\kappa^2}{2R}$, μεταφέρομεν τοῦτο εἰς τὴν θέσιν ΑΗ, ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς τῆς διαμέτρου πρὸς τὸν ἄξονα ΑΖ εὐθείας, καὶ φέρομεν τήν, κάθετον εἰς τὸ Η ἐπὶ τὴν ΑΗ, εὐθεῖαν ΧΗΥ.

2) Ὁρίζομεν τὸ τμῆμα ΑΛ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὴν ΧΥ (Σχ. 851) εἰς τρόπον, ὥστε

Σχ. 851.

$$ΑΛ = \frac{\kappa^2}{\eta}$$

καὶ μεταφέρομεν αὐτὸ εἰς τὴν θέσιν ΑΔ, ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς τῆς ΑΛ πρὸς τὸν ἄξονα ΑΖ εὐθείας. Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΑΔ εἶναι τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον σχῆμα τῆς ΧΥ. Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΛ θὰ ἔχωμεν

$$ΑΚ^2 = \kappa^2 = ΑΗ \,.\, ΑΛ = \eta \,.\, 2R = \beta\gamma.$$

Πρόβλημα 419—V

1342 ζ. Δίδονται ὁ πόλος Α, ὁ ἄξων ΑΖ καὶ ἡ δύναμις κ^2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον σχῆμα περιφερείας (Γ), μὴ διερχομένης διὰ τοῦ πόλου.

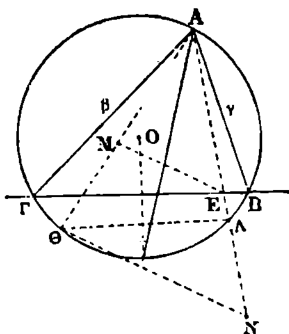
Ὁ ταχύτερος τρόπος εἶναι νὰ ὁρισθῇ ἡ περιφέρεια (O'), ἡ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ . ΑΔ' = κ² (Σχ. 852), καὶ νὰ ληφθῇ ἡ συμμετρικὴ αὐτῆς (O) πρὸς τὸν ἄξονα ΑΖ.

1342 η. Παρατήρησις. Τὰ σημεῖα Μ, Ν, ὡς καὶ τὰ Ε, Ζ, εἶναι συμμετρικῶς ἀντίστροφα. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ σημεῖα Γ καὶ Ο' δὲν εἶναι ἀντίστροφα ἀλλήλων ἐν τῇ ἀντιστροφῇ Α (Α, κ²), καὶ τὰ Γ καὶ Ο δὲν θὰ εἶναι συμμετρικῶς ἀντίστροφα σημεῖα.

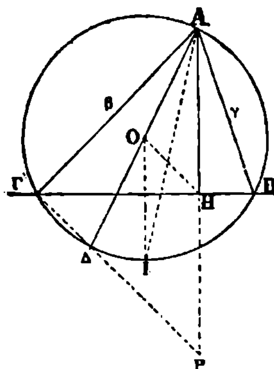
Πρόβλημα 419—VI

1342 θ. Νὰ ὁρισθῇ τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον σημείου Μ πρὸς πόλον τὴν κορυφὴν Α τριγώνου ΑΒΓ, ἄξονα τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α καὶ δύναμιν κ² ἴσην πρὸς τὸ γινόμενον βγ, τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ τοῦ τριγώνου.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΜΘ καὶ τὴν, παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, χορδὴν ΘΛ τῆς περιφερείας ΑΒΓ. Ἡ ΑΛ εἶναι συμμετρικὴ τῆς ΑΘ πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α.



Σχ. 853.



Σχ. 854.

Ἡ ἐκ τοῦ Θ παράλληλος ΘΝ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΕ ὁρίζει τὸ ζητούμενον σημεῖον Ν. Ἐπειδή :

$$\frac{AM}{A\Theta} = \frac{AE}{AN} \quad \text{ἢ} \quad AM . AN = AE . A\Theta = \beta\gamma = \kappa^2.$$

1342 ι. Παρατήρησις. Τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον Ρ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἶναι τὸ συμμετρικὸν τῆς κορυφῆς Α σημεῖον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ. Ἐπειδὴ (Σχ. 854):

$$2\,AO . AH = \beta\gamma \quad \text{ἢ} \quad AO . 2\,AH = AO . AP = \beta\gamma.$$

Καὶ ἡ προηγουμένη, ἄλλωστε, κατασκευὴ ἐπαληθεύει τὸν ἰσχυρισμὸν αὐτόν.

Θεώρημα 419—VII

1342 κ. Εἰς τὴν προηγουμένως ὁρισθεῖσαν συμμετρικὴν ἀντιστροφήν, τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον Ν δοθέντος σημείου Μ καὶ τὸ ἰσογώνιον Μ′ τοῦ σημείου Μ, εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν τομῶν εὐθείας ΑΜ′Ν, διερχομένης διὰ τοῦ πόλου, καὶ περιφερείας διερχομένης διὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ.

Δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ λέγονται ἰσογώνια ἀλλήλων ἐὰν λαμβάνωνται διὰ τῶν τομῶν δύο ζευγῶν ἰσογωνίων εὐθειῶν ΑΘ, ΑΛ καὶ ΒΘ′, ΒΛ′. (Βλ. §§ 753, 1118 α, 1344 α καὶ 2307).

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ἰσογώνιον Μ′ τοῦ Μ, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὰς ΑΜΘ, ΒΜΘ′ εὐθείας, τὰς ΘΛ, Θ′Λ′, παραλλήλους, ἀντιστοίχως τῶν ΓΒ καὶ ΓΑ καὶ τὰς ΛΑ, Λ′Β.

1) Ἐπειδὴ τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον τοῦ Ν κεῖται ἐξ ὁρισμοῦ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΛ, τὰ σημεῖα Α, Μ′ καὶ Ν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

2) Τὰ τρίγωνα ΑΓΝ, ΑΜΒ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην εἰς Α, περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν. Ἐπειδή, ἐκ τῆς σχέσεως ΑΝ . ΑΜ = βγ ἕπεται ἡ ἀναλογία:

$$\frac{AM}{\beta} = \frac{\gamma}{AN}.$$

'Επομένως,

$$\text{γων. } ΓΝΑ = ΜΒΑ = Μ'ΒΓ,$$

καὶ τὸ σημεῖον Μ' εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΒΝΓ.

1342 λ. Παρατηρήσεις. 1) 'Ονομάζονται *ἰσοκυκλικὰ σημεῖα* (isocycliques), ἀναφορικῶς πρὸς τὴν ΒΓ, νὰ σημεῖα Ν καὶ Μ', ἐὰν εἶναι τομαὶ εὐθείας διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ περιφερείας διερχομένης διὰ τῶν Β καὶ Γ. 'Ομοίως, τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν' εἶναι ἰσοκυκλικὰ σημεῖα.

'Η περιφέρεια ΒΜ'Γ, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ ἰσογωνίου Μ' τοῦ Μ τέμνει τὴν ΑΜ' κατὰ τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον Ν τοῦ σημείου Μ. 'Επίσης, διὰ τῆς περιφερείας ΒΜΓ ὁρίζεται τὸ συμμετρικῶς ἀντίστροφον Ν' τοῦ ἰσογωνίου Μ τοῦ Μ'.

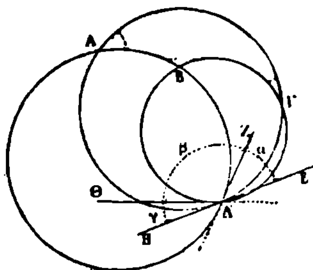
2) Αἱ εὐθεῖαι ΜΜ', ΝΝ' εἶναι παράλληλοι, τὰ δὲ σημεῖα Ν, Ν', τὰ συμμετρικῶς ἀντίστροφα τῶν ἰσογωνίων σημείων Μ καὶ Μ', εἶναι καὶ αὐτὰ ἰσογώνια.

3) 'Η χρῆσις τῆς συμμετρικῆς ἀντιστροφῆς ὁδηγεῖ εἰς μετασχηματισμὸν γνωστῶν ἤδη προτάσεων καὶ ἀνεύρεσιν νέων θεωρημάτων. Βλ. σχετικῶς τὴν ἤδη ὑπομνησθεῖσαν ἀξιοσημείωτον ἐργασίαν τοῦ Bernès (*J. M. E.*, 1891, σ. 121, 145 κλπ.).

4) 'Η σπουδὴ τῶν μὴ ὁμοιοθέτων ὁμοίων σχημάτων ἤγαγεν εἰς ἐνδιαφέροντα θεωρήματα τῆς *Γεωμετρίας τοῦ τριγώνου*. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τῆς χρήσεως τῆς *γωνιώδους ἀντιστροφῆς*, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἀκτῖνες εἰς τὰ ἀντίστροφα σημεῖα σχηματίζουν πρὸς ἀλλήλας σταθερὰν γωνίαν.

Θεώρημα τοῦ Miquel 419—VIII

1342 μ. 'Εὰν τρεῖς περιφέρειαι, τεμνόμεναι ἀνὰ δύο, ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ καμπυλογράμμου τριγώνου, τοῦ ἔχοντος ὡς κορυφὰς τὰ τρία ἄλλα σημεῖα τομῆς, εἶναι ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας. (Miquel, *Journal de Liouville*, τόμ. IX, σ. 24.— Παράθεσις τοῦ Baltzer εἰς *Planimetrie*, § 3, n° 6).



Σχ. 855 α

1η 'Απόδειξις. Ἔστω Δ τὸ κοινὸν σημεῖον τριῶν περιφερειῶν, τεμνομένων ἐπίσης κατὰ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ καμπυλογράμμου τριγώνου ΑΒΓ ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας.

Αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς σχηματιζομένας εἰς τὸ Δ. 'Η γωνία εἰς τὸ Α λ. χ. εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν μὲ κορυφὴν Δ καὶ καμπυλογράμμους πλευρὰς τὰ τόξα ΑΓΔ καὶ ΑΒΔ· ἐὰν δὲ φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας ΔΕ, ΔΖ τῶν τόξων αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν $\widehat{Α} = α$.

'Αναλόγως, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\widehat{Β} = β, \quad \widehat{Γ} = γ$$

καὶ κατὰ συνέπειαν

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=\alpha+\beta+\gamma=2 \text{ ὀρθαὶ γωνίαι.}$$

2α Ἀπόδειξις. Ἡ ἀντιστροφὴ μὲ πόλον τὸ σημεῖον Δ μετασχηματίζει τὰς τρεῖς περιφερείας εἰς τρεῖς εὐθείας. Τὸ τρίγωνον τῶν εὐθειῶν τούτων ἔχει γωνίας ἴσας πρὸς τὰς γωνίας τῶν περιφερειῶν, ἀνὰ δύο λαμβανομένων. Ἑπομένως,

$$\alpha+\beta+\gamma=2 \text{ ὀρθαὶ γωνίαι.}$$

Σημείωσις ἐπὶ τῶν ἀντιστροφῶν

1342 ν. Εἰς τὰς παραγράφους 217 ἕως 249 ἐπελήφθημεν, ἀρκετὰ διεξοδικῶς, θεμάτων ἀναφερομένων εἰς τὴν κυρίως *ἀντιστροφήν*· ὡμιλήσαμεν ἐπίσης περὶ τῆς *συμμετρικῆς ἀντιστροφῆς* (§§ 1342 α—1342 λ), ὡς καὶ περὶ τῆς *ἰσογωνίου* τοιαύτης.

Πᾶσα σχέσις, πᾶσα γραφικὴ κατασκευή, διὰ τῆς ὁποίας ἀντιστοιχοῦμεν εἰς δοθὲν σημεῖον ἓν ἄλλο, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς βάσις μιᾶς μεθόδου μετασχηματισμοῦ. Ἡ κυρίως *ἀντιστροφὴ* διατηρεῖ τὰς γωνίας καὶ ἐφαρμόζεται εἰς τὴν σφαῖραν, γενικώτερον εἰς τὸν χῶρον, ἐξ ἴσου εὐκόλως ὅπως καὶ εἰς τὰ ἐπίπεδα σχήματα. Οὕτω, πᾶσα ἰδιότης ἑνὸς ἐπιπέδου τριγώνου ἔχει τὴν ἀντίστοιχόν της εἰς ἓν σφαιρικὸν τρίγωνον ἢ καὶ εἰς τὸ καμπυλόγραμμον τρίγωνον μὲ πλευρὰς τόξα τριῶν περιφερειῶν.

Εἰς τὸν χῶρον ὁ μετασχηματισμὸς δι' ἀντιστροφῆς τῆς *σπείρας* ἐπιτρέπει τὴν εὔκολον σπουδὴν τῆς *κυκλίδος*, ἂν καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἐμφανίζεται ὑπὸ μεγάλην ποικιλίαν μορφῶν καὶ ὄψεων (§ 1919, β. Σημ., *Exercices de Géométrie descriptive*, 4η ἔκδ., σ. 850 ἕως 871).

Ἡ *ἰσογώνιος ἀντιστροφὴ* ὁρίζεται διὰ τῆς ἀντιστοιχίας δύο *σημείων ἰσογωνίων* (§ 753). Ὅταν τὸ ἓν τῶν σημείων Μ γράφῃ μίαν καμπύλην, τὸ ἰσογώνιον αὐτοῦ Ν γράφει τὸ *ἰσογωνίως μετασχηματισμένον* τοῦ πρώτου σχήματος. (Βλ. §§ 753, 1118 α, 1344 α, 2307).

Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος ὡδήγησεν εἰς ἐνδιαφέροντα εὑρήματα τῆς *Γεωμετρίας τοῦ τριγώνου*. Κατ' αὐτόν, πᾶσα εὐθεῖα μετασχηματίζεται εἰς κωνικὴν τομὴν διερχομένην διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου, ἐὰν δὲ αὕτη εἶναι ἐξωτερική, ἐφαπτομένη ἢ τέμνουσα τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας, τὸ μετασχηματισμένον αὐτῆς σχῆμα εἶναι ἔλλειψις, παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἀντιστοίχως (§ 1242, π). Ἐν τούτοις, τὸ ἰσογωνίως ἀντίστροφον σχῆμα μιᾶς περιφερείας εἶναι, ἐν γένει, καμπύλη τρίτου βαθμοῦ καὶ τῆς ὁποίας ἡ σπουδὴ ἐκφεύγει τῶν ὁρίων τῶν *Στοιχείων τῆς Γεωμετρίας*. (Βλ. *Revue de mathématiques spéciales* τοῦ *Vuibert*, 1890, σ. 11).

Διὰ τὸ ἱστορικὸν τῆς *ἰσογωνίου ἀντιστροφῆς* βλ. ἐπμ. § 2306.

Θεώρημα 419—IX

1342 ξ. **Ἔστω ΑΒΓ τρίγωνον καὶ Ο τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του. Αἱ κάθετοι εἰς τὸ Ο ἐπὶ τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, συναντοῦν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς σημεῖα Δ, Ε, Ζ, κείμενα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. (H. Brocard).**

Ἐὰν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ εὑρίσκωνται ἐπ' εὐθείας, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\mathrm{A\Delta}}{\Gamma\Delta}\cdot\frac{\mathrm{BZ}}{\mathrm{AZ}}\cdot\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{BE}}=1.$$

Ἐκ τῶν διατεμνουσῶν ΔΝ, ΕΚ, ΖΛ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας :

$$\frac{ΑΔ.ΒΘ.ΓΝ}{ΓΔ.ΑΘ.ΒΝ}=1, \quad \frac{ΓΕ.ΑΚ.ΒΗ}{ΒΕ.ΓΚ.ΑΗ}=1, \quad \frac{ΒΖ.ΓΙ.ΑΛ}{ΑΖ.ΒΙ.ΓΛ}=1,$$

τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον κατὰ μέλη μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἰσότητα :

$$\frac{ΑΔ.ΒΖ.ΓΕ}{ΓΔ.ΑΖ.ΒΕ}\times\frac{ΒΘ.ΓΝ.ΑΚ.ΒΗ.ΓΙ.ΑΛ}{ΑΘ.ΒΝ.ΓΚ.ΑΗ.ΒΙ.ΓΛ}=1. \quad (1)$$

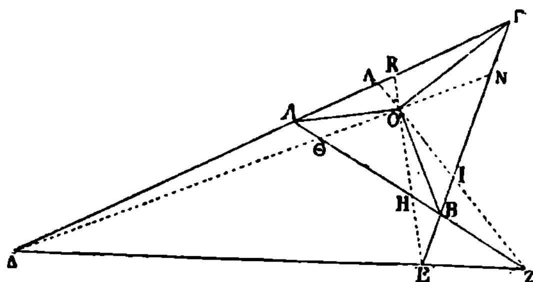
Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΓΟΙ, ΒΟΝ καὶ ΓΟΝ, ΒΟΙ ἔχουν τὰς βάσεις των ἐπ' εὐθείας καὶ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν γωνίας ἴσας, ὡς ὀρθάς, θὰ ἔχωμεν τὰς ἀναλογίας :

$$\frac{ΟΓ.ΟΙ}{ΟΒ.ΟΝ}=\frac{ΓΙ}{ΒΝ}, \quad \frac{ΟΓ.ΟΝ}{ΟΒ.ΟΙ}=\frac{ΓΝ}{ΒΙ}.$$

Ὁμοίως :

$$\frac{ΟΒ.ΟΘ}{ΟΑ.ΟΗ}=\frac{ΒΘ}{ΑΗ}, \quad \frac{ΟΒ.ΟΗ}{ΟΑ.ΟΘ}=\frac{ΒΗ}{ΑΘ},$$

$$\frac{ΟΑ.ΟΚ}{ΟΓ.ΟΛ}=\frac{ΑΚ}{ΓΛ}, \quad \frac{ΟΑ.ΟΛ}{ΟΓ.ΟΚ}=\frac{ΑΛ}{ΓΚ}.$$



Σχ. 655 β

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη αὐτῶν εὑρίσκομεν :

$$\frac{ΓΟ^2.ΒΟ^2.ΑΟ^2}{ΒΟ^2.ΑΟ^2.ΓΟ^2}=1=\frac{ΓΙ.ΓΝ.ΒΘ.ΒΗ.ΑΚ.ΑΛ}{ΒΙ.ΒΝ.ΑΗ.ΑΘ.ΓΛ.ΓΚ} \quad (2)$$

καί, ἑπομένως, ἐκ τῆς (1),

$$\frac{ΑΔ.ΒΖ.ΓΕ}{ΓΔ.ΑΖ.ΒΕ}=1,$$

σχέσις ἀποδεικνύουσα τὴν πρότασιν.

Παρατήρησις. Αἱ περιφέρειαι αἱ γραφόμεναι ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΒΔ, ΓΖ ὡς διαμέτρων, διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Ο καὶ τοῦ συμμετρικοῦ Ο' πρὸς τὴν κοινὴν τῶν περιφερειῶν διάκεντρον. Ἐπειδὴ τὰ

κέντρα τῶν περιφερειῶν τούτων, ὡς μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ πλήρους τετραπλεύρου ΑΒΕΔΓΖ, κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς (§ 1546, ε, 2α σημ/σις).

Τὸ σημεῖον αὐτὸ Ο' ἔχει τὰς αὐτάς, ὡς τὸ Ο, ἰδιότητας πρὸς τὴν διατέμνουσαν ΔΕΖ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Λόγοι καὶ σημεῖα τομῆς

1343. Ἀριθμητικαὶ σχέσεις. Εἰς τὸ ἐπίπεδον, ἓν σημεῖον Μ δύναται νὰ ὁρισθῇ διὰ τῶν τιμῶν δύο καταλλήλων μεταβλητῶν μεγεθῶν x, y· ἀντιστρόφως, δοθέντος ἑνὸς συνόλου σημείων Μ ἐχόντων ὡρισμένας ἰδιότητας, αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν x, y, αἱ ὁρίζουσαι τὴν θέσιν ἑκάστου σημείου, συνδέονται πρὸς ἀλλήλας διὰ μιᾶς ὡρισμένης (ἐν γένει) ἀριθμητικῆς σχέσεως.

Αἱ ἰδιότητες τῶν σημείων Μ δύνανται νὰ ὁρίζωνται διὰ μιᾶς τῶν ἀκολούθων σχέσεων, συνδεουσῶν δύο μήκη x, y, καταλλήλων πρὸς προσδιορισμὸν τῆς θέσεως ἑκάστου τῶν σημείων αὐτῶν :

1) Τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν εἶναι σταθερόν, $x + y = \lambda$.

2) Ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν εἶναι σταθερά, $x - y = \delta$.

3) Ὁ λόγος τῶν μηκῶν εἶναι σταθερός, $\frac{x}{y} = \frac{\mu}{\nu}$.

4) Τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν εἶναι σταθερόν, $xy = \kappa^2$.

5) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν σταθερόν,

$$x^2 + y^2 = \alpha^2,$$

6) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν σταθερά,

$$x^2 - y^2 = \beta^2,$$

ὅπου λ, δ, μ, ν, κ, α, β σταθεραὶ ποσότητες.

Τόπος 420

1344. **Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν εἶναι ἴσος πρὸς δοθέντα ἀριθμὸν $\frac{\mu}{\nu}$;**

Τὸ ζήτημα τοῦτο ἐξητάσθη ἤδη εἰς τὰς *Μεθόδους* (§ 60). Ἐνταῦθα θὰ ἐπιληφθῶμεν αὐτοῦ κατὰ γενικώτερον τρόπον.

Ἔστωσαν ΟΧ, ΟΥ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι.

Ὁ πλήρης τόπος ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων εὐθειῶν συμμετρικῶν ἀνὰ δύο πρὸς τὰς διχοτόμους ΟΙ, ΟΙ' τῆς γωνίας τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν.

1) Ἔστωσαν Α, Α' σημεῖα τοιαῦτα, ὥστε :

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\mu}{\nu}, \quad \frac{A'M'}{A'N'} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΑ' ἀπαντοῦν εἰς τὸ ἐρώτημα.

2) Ἐὰν ἡ ἀπόστασις, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ μ, εἶναι ἡ ἀπὸ τῆς ΟΥ, εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸν τόπον ἀνήκουν αἱ εὐθεῖαι ΟΒ, ΟΒ'.

Σχ. 856.

1344 α. Παρατηρήσεις. 1) Ἡ εὐθεῖα ΟΑ εἶναι συμμετρική, πρὸς τὴν ΟΙ, τῆς ΟΒ καὶ ἡ ΟΑ' τῆς ΟΒ'.

2) Ἐὰν αἱ ἀποστάσεις, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὸ μ, εἶναι αἱ ἀπὸ τῆς ΟΧ, ὁ τόπος εἶναι τὸ ζεῦγος τῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΑ'.

3) Διὰ τὴν διάκρισιν τῶν μερῶν τοῦ τόπου, καταφεύγομεν εἰς τὴν σύμβασιν τῶν σημείων. *Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς θετικὰς* τὰς ἀποστάσεις, ἢ *τεταγμένας*, ΑΜ, ΑΝ, ἐὰν τὸ σημεῖον Α εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ὀξείας γωνίας τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν. Οὕτω γράφομεν

$$\frac{AM}{AN}=\frac{\mu}{\nu}, \quad \frac{A'M'}{A'N'}=-\frac{\mu}{\nu},$$

$$\frac{BP}{B\Pi}=\frac{\nu}{\mu}, \quad \frac{B'P'}{B'\Pi'}=-\frac{\nu}{\mu}.$$

4) Αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ὡς συμμετρικαὶ πρὸς τὴν διχοτόμον ΟΙ, εἶναι *ἰσογώνιοι εὐθεῖαι*· ἐπίσης αἱ ΟΑ', ΟΒ'. Διὰ δύο ἰσογωνίους εὐθείας, ὡς αἱ ΟΑ, ΟΒ, οἱ λόγοι τῶν ἀποστάσεων $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\nu}{\mu}$ εἶναι ἀντίστροφοι ἀλλήλων.

5) Δύο *σημεῖα ἰσογώνια* Μ, Μ' ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 855), εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς δύο ζευγῶν ἰσογωνίων εὐθειῶν ΑΘ, ΑΛ καὶ ΒΘ', ΒΛ'.

6) Αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΑ' (Σχ. 856), αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς αὐτούς, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, λόγους τῶν ἀποστάσεων ἀλλ' ἀντιθέτων σημείων, εἶναι *συζυγεῖς εὐθεῖαι* πρὸς τὰς ΟΧ, ΟΥ καὶ ἀποτελοῦν μετ' αὐτῶν μίαν *ἁρμονικὴν τετράδα* εὐθειῶν. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι αὕτη τέμνεται ὑπὸ τυχούσης εὐθείας κατὰ *ἁρμονικήν*, ἐπίσης, τετράδα σημείων ἢ κατὰ τέσσαρα, εἰς *ἁρμονικὴν διαίρεσιν* εὑρισκόμενα, σημεῖα.

Τὸ σύστημα τῶν ἓξ εὐθειῶν ΟΑ', ΟΧ, ΟΑ, ΟΒ, ΟΥ, ΟΒ', τέμνεται ὑπὸ τυχούσης εὐθείας κατὰ ἕξ, ἐν γένει, σημεῖα, ἐν *ἐνελίξει* εὑρισκόμενα.

Τόπος 420—I

1345. **Ποῖαι αἱ εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουν λόγον δοθέντα;**

Ἔστωσαν Α, Β, $\frac{\mu}{\nu}$ τὰ σημεῖα καὶ ὁ λόγος.

'Αρκεῖ νὰ ὁρισθοῦν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, τὰ διαιροῦντα αὐτήν, ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

Πράγματι, διὰ πᾶσαν εὐθεῖαν διὰ τῶν Γ ἢ Δ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΑΡ}{ΒΠ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{μ}{ν} \quad ἢ \quad \frac{ΑΤ}{ΒΣ} = \frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{μ}{ν}.$$

Σχ. 857.

Παρατήρησις. 'Εὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν συμφωνίαν διὰ τὰ σημεῖα, αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι θὰ εἶναι αἱ δι' ἑνὸς μόνον ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Δ διερχόμεναι. 'Επειδὴ οἱ λόγοι $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ καὶ $\frac{ΑΔ}{ΒΔ}$ θὰ πρέπει νὰ θεωρηθοῦν ἴσοι μὲν κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἀλλ' ἑτερόσημοι.

Τόπος 420—II

1345 α. Δύο εὐθεῖαι ΑΧ, ΑΥ τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων. 'Επὶ ἑκάστης αὐτῶν, ὡς τῆς ΒΓ, λαμβάνομεν σημεῖον. Μ διαιροῦν τὸ τμῆμα ΒΓ κατὰ δοθέντα λόγον $\frac{μ}{ν}$. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Μ;

1) 'Εὰν $\frac{ΒΜ}{ΜΓ} = \frac{μ}{ν}$, ὁ τόπος τῶν σημείων Μ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΜ.

2) 'Εὰν $\frac{ΝΒ}{ΝΓ} = \frac{μ}{ν}$, ὁ τόπος τῶν σημείων Ν εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΝ.

Σχ. 858.

Παρατήρησις. 'Η τετρὰς τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΜ, ΑΝ εἶναι ἁρμονική.

Τόπος 420 — III

1346. 'Επὶ δύο εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ λαμβάνομεν μήκη τοιαῦτα, ὥστε

$$\frac{ΜΟ}{ΝΟ} = \frac{Μ'Ο}{Ν'Ο} = \ldots = \frac{μ}{ν},$$

ἐκ δὲ τῶν σημείων Μ, Μ'..., Ν, Ν'... φέρομεν εὐθείας παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας. Ποῖος ὁ τόπος τῶν τομῶν Α, Α'... τῶν παραλλήλων τούτων;

Σχ. 859.

Τὸ ζήτημα τοῦτο δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Τέμνομεν τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας ΧΟΥ *διὰ σειρᾶς παραλλήλων* ΜΝ, Μ'Ν'..., *ἐκ δὲ τῶν σημείων* Μ, Μ'... Ν, Ν'... κλπ.

'Ο τόπος εἶναι εὐθεῖα γραμμή, διὰ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας Ο διερχομένη.

Τόπος 420—IV

1346 α. Μεταξὺ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας ΧΟΥ ἐγγράφομεν εὐθείας ΜΡ, ΝΠ, παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς δοθείσας διευθύνσεις καὶ τῶν ὁποίων τὰ μήκη ἔχουν λόγον δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων τομῆς Λ τῶν ζευγῶν τῶν εὐθειῶν αὐτῶν;

'Ο τόπος ἀποτελεῖται ἐκ ζεύγους εὐθειῶν ΟΛ, ΟΛ', περιεχομένων ἐντὸς τῆς γωνίας ΧΟΥ καὶ τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς Χ'ΟΥ, ἀντιστοίχως.

Τόπος 421

1347. 'Εκ δοθέντος σημείου Ο φέρομεν εὐθείας πρὸς τὰς διάφορα σημεῖα Μ δοθείσης εὐθείας καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ ἑκάστης αὐτῶν σημεῖον Ν τοιοῦτον, ὥστε $\frac{OM}{ON}=\frac{\mu}{\nu}$. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Ν;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 63).

Τόπος 422

1348. 'Εκ δοθέντος σημείου Ο φέρομεν εὐθείας πρὸς τὰ διάφορα σημεῖα Μ μιᾶς περιφερείας καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ ἑκάστης αὐτῶν σημεῖον Ν τοιοῦτον, ὥστε $\frac{OM}{ON}=\frac{\mu}{\nu}$. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Ν;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 65).

Τόπος 423

1349. Δίδονται εὐθεῖα ΧΧ' καὶ σημεῖον ἐξωτερικὸν αὐτῆς Α. Διὰ τοῦ σημείου τούτου φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΒ, περατουμένην εἰς τὴν ΧΧ', σχηματίζομεν γωνίαν ΒΑΓ ἴσην πρὸς δοθεῖσαν φ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν μῆκος ΑΓ ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ λόγον δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Γ;

Σχ. 860.

1η 'Απόδειξις. Διὰ ν' ἀναχθῶμεν εἰς γνωστὸν ἤδη ζήτημα, προεκτείνομεν τὴν ΒΑ εἰς μῆκος ΑΕ = ΑΓ. 'Ο τόπος τοῦ σημείου Ε εἶναι μία, παράλληλος πρὸς τὴν ΧΧ', εὐθεῖα (§ 1347).

Πράγματι, $\frac{AB'}{AE'}=\frac{\mu}{\nu}$.

Ἡ εὕρεσις τοῦ τόπου τούτου ὁδηγεῖ ἀμέσως εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν: Φέρομεν τὴν κάθετον ΑΒ' ἐπὶ τὴν ΧΧ', σχηματίζομεν γωνίαν Β'ΑΓ' = φ καὶ λαμβάνομεν ΑΓ' = ΑΕ'. Ἡ κάθετος ΥΥ' εἰς τὸ σημεῖον Γ' ἐπὶ τὴν ΑΓ' εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Χ'ΔΓ' καὶ Β'ΑΓ' = φ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς των καθέτους ἀντιστοίχως, πρὸς ὁρισμὸν τοῦ τόπου ἀρκεῖ ὅπως, *ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου* Γ *αὐτοῦ ἀχθῇ εὐθεῖα* ΥΓΥ', *σχηματίζουσα πρὸς τὴν* ΧΧ' *γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν* φ.

2α Ἀπόδειξις. Τὸ πρόβλημα λύεται εὐκόλως καὶ διὰ συνθέσεως, κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον: Διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Γ τοῦ τόπου φέρομεν τὴν ΓΔ κατὰ γωνίαν ΓΔΧ' πρὸς τὴν ΧΧ' ἴσην πρὸς φ.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΥΔΥ' εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΒ' μέχρι τῆς ΧΧ' νὰ σχηματίσωμεν γωνίαν Β'ΑΓ' = φ, ὅπου Γ' ἐπὶ τῆς ΥΥ', καὶ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $\frac{ΑΒ'}{ΑΓ'} = \frac{μ}{ν}$.

Πρὸς τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ εἶναι ἐγγράψιμον, ἀφοῦ αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΒΔΓ = 180° − φ εἶναι παραπληρωματικαί. Ἄρα, γων. ΑΒΒ' = ΑΓΓ'. Ἀφ' ἑτέρου, καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒ'ΔΓ' εἶναι ἐπίσης ἐγγράψιμον, ἐπειδὴ Β'ΔΓ' + + Β'ΑΓ' = 180°. Εἶναι, ἑπομένως, γων. ΑΒ'Β = ΑΓ'Γ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΒ', ΑΓΓ' ὅμοια, ὡς ἰσογώνια. Συνεπῶς:

$$\frac{ΑΒ'}{ΑΓ'} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{μ}{ν}.$$

1350. *Παρατηρήσεις.* 1) Ἡ ἐκφώνησις τοῦ ζητήματος διατυποῦται πολλάκις καὶ ὡς ἑξῆς:

Τρίγωνον ΑΒΓ *μεταβάλλεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του, εἰς τρόπον, ὥστε νὰ μένῃ ὅμοιον πρὸς ἑαυτό, μία κορυφή του* Α *νὰ παραμένῃ σταθερὰ καὶ μία ἄλλη* Β *νὰ γράφῃ δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Ποῖος ὁ τόπος τῆς τρίτης κορυφῆς* Γ ;

2) Ὁ πρῶτος τρόπος ἀποδείξεως ἄγει ἀπ' εὐθείας εἰς τὴν παρατήρησιν:

Ἡ κορυφὴ Γ *γράφει σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ γραφόμενον ὑπὸ τῆς κορυφῆς* Β.

Θὰ μελετήσωμεν, ἐν τούτοις, ἰδιαιτέρως τὴν ἐνδιαφέρουσαν περίπτωσιν, καθ' ἣν κορυφὴ Β γράφει περιφέρειαν (§ 1355).

Θεώρημα 423—I

1350 α. **Ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ μεταβλητὸν τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ προηγουμένου τόπου (§ 1349), διέρχεται πάντοτε διὰ σταθεροῦ σημείου.**

Τοῦτο εἶναι τὸ Δ, ἕνεκα τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου Α'Β'Γ'Δ.

Θεώρημα 423—II

1351. **Ἐὰν ἓν σχῆμα μεταβάλλεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του εἰς τρόπον, ὥστε νὰ παραμένῃ ὅμοιον ἑαυτῷ, μία κορυφή του νὰ μένῃ σταθερὰ καὶ μία ἄλλη νὰ γράφῃ εὐθεῖαν γραμμήν, τότε πᾶν ἄλλο σημεῖον τοῦ σχήματος γράφει ἐπίσης εὐθεῖαν γραμμήν. Ἡ σταθερὰ κορυφὴ εἶναι τὸ**

σταθερὸν κέντρον ὁμοιότητος τῶν, κατὰ τὸν ὡς ἄνω τρόπον, μεταβαλλομένων σχημάτων. (Βλέπε Σημ. § 1284, τὸ *γενικὸν Θεώρημα* τῆς § 1357, ὡς καὶ § 2476 καὶ ἑπμ.).

Τόπος 423—III

1352. Δύο τρίγωνα ὅμοια ἔχουν κοινὴν κορυφὴν Α. Τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, ΑΒΓ, μένει ἀκίνητον ἐνῷ τὸ ἄλλο Β'ΑΓ' στρέφεται, εἰς τὸ ἐπίπεδόν του, περὶ τὴν κορυφὴν Α. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Δ τῶν εὐθειῶν ΒΒ' καὶ ΓΓ';

1) Εὐκόλως ἀναγνωρίζομεν ὅτι τὸ ζήτημα τοῦτο δύναται νὰ συνδεθῇ πρὸς τὸ προηγούμενον. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ' εἶναι δύο θέσεις μεταβλητοῦ τριγώνου παραμένοντος ὁμοίου πρὸς ἑαυτό· ἐὰν λοιπὸν ἡ κορυφὴ Β γράφῃ εὐθεῖαν ΒΒ', ἡ κορυφὴ Γ θὰ γράφῃ εὐθεῖαν ΓΓ', τέμνουσαν τὴν πρώτην κατὰ σταθερὰν γωνίαν ΒΔΓ', παραπληρωματικὴν τῆς ΒΑΓ.

Σχ. 861.

Εἶναι, ἑπομένως, ὁ τόπος τοῦ Δ ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἰδού, ἄλλωστε, καὶ μία ἀπ' εὐθείας ἀπόδειξις:

2) Ἐκ κατασκευῆς, ἔχομεν:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΒ'} = \frac{ΑΓ}{ΑΓ'},$$

καὶ γων. ΒΑΒ' = ΓΑΓ', ἀφοῦ γων. ΒΑΓ = Β'ΑΓ'. Τὰ τρίγωνα, συνεπῶς, ΑΒΒ' καὶ ΑΓΓ' εἶναι ὅμοια καὶ γων. ΑΓΓ' = ΑΒΒ'.

Ἐπειδὴ ἡ γων. ΑΓΔ, παραπληρωματικὴ οὖσα τῆς ΑΓΓ', εἶναι καὶ παραπληρωματικὴ τῆς ΑΒΔ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ ὁ τόπος τοῦ σημείου Δ εἶναι ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ σταθερὸν τρίγωνον ΑΒΓ.

Τόπος 423—IV

1353. Ἐκ σταθεροῦ σημείου Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΜΝ δύο δοθεισῶν παραλλήλων καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς ΜΝ τρίγωνον ΜΝΟ ὅμοιον πρὸς δοθὲν ἄλλο. Ποῖος ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Ο;

Σχ. 862.

Ἔστωσαν ΜΝΟ, Μ'Ν'Ο' δύο θέσεις τοῦ μεταβλητοῦ τριγώνου. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΑΜ}{ΑΝ} = \frac{ΑΜ'}{ΑΝ'} = \frac{ΜΝ}{Μ'Ν'} = \frac{ΝΟ}{Ν'Ο'} \text{ κλπ.}$$

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΝΟ, ΑΝ'Ο' εἶναι ὅμοια, ἐπαναπίπτομεν εἰς τὸ ζήτημα τῆς § 1350. Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι εὐθεῖα ΟΒ'Ο', τέμνουσα τὰς παραλλήλους κατὰ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν (σταθερὰν) ΝΑΟ.

Τόπος 423—V

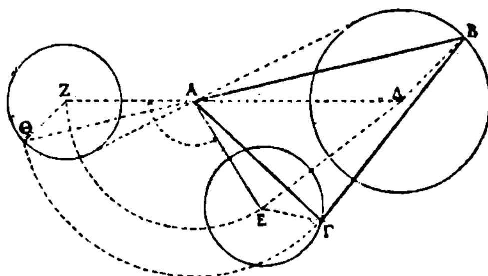
1354. Ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΜΝ (Σχ. 862), κατασκευάζομεν τετράγωνον ἢ γενικώτερον, σχῆμα ὅμοιον πρὸς ἄλλο δοθέν. Ποῖοι οἱ τόποι τῶν κορυφῶν τῶν σχημάτων τούτων ;

Ἑκάστη κορυφή, ὡς καὶ πᾶν σημεῖον τοῦ μεταβλητοῦ σχήματος, γράφει εὐθεῖαν, κατασκευαζομένην καθ' ὅμοιον τρόπον ὡς καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΒ'Ο' τοῦ προηγουμένου τόπου.

Τόπος 424

1355. Τρίγωνον ΑΒΓ μεταβάλλεται εἰς τὸ ἐπίπεδόν του εἰς τρόπον, ὥστε νὰ παραμένῃ ὅμοιον πρὸς ἑαυτό. μία κορυφή του Α νὰ μένῃ σταθερὰ καὶ μία ἄλλη κορυφὴ Β νὰ γράφῃ περιφέρειαν (Δ). Ποῖος ὁ τόπος τῆς τρίτης κορυφῆς Γ ;

Α'. Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μένει ὅμοιον πρὸς ἑαυτό, ἡ γωνία ΒΑΓ διατηρεῖται σταθερά, ὡς καὶ ὁ λόγος $\frac{АВ}{АΓ}$.



Σχ. 863.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, σχηματίζομεν γωνίαν ΔΑΕ ἴσην πρὸς τὴν ΒΑΓ καὶ λαμβάνομεν τὴν ΑΕ εἰς τρόπον, ὥστε :

$$\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}.$$

Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΓΑΕ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων. Ἐπομένως,

$$\frac{ΒΔ}{ΓΕ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \text{ ἢ } ΓΕ = ΒΔ.\frac{ΑΓ}{ΑΒ},$$

καὶ τὸ μῆκος ΓΕ εἶναι σταθερόν. Εἶναι, ἄρα, ὁ ζητούμενος τόπος τοῦ σημείου Γ ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα τὸ σταθερὸν τοῦτο μῆκος.

Β'. Λύσις. Μεταφέρομεν τὸ τμῆμα ΑΕ ἐπὶ τοῦ ΑΖ, εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΔΑ καὶ θεωροῦμεν τὸ Α ὡς κέντρον ὁμοιότητος· θὰ ἔχωμεν πάντοτε $\frac{ΑΒ}{ΑΘ} = \frac{ΒΔ}{ΖΘ}$. Ὁ τόπος, συνεπῶς, τοῦ σημείου Θ εἶναι περιφέρεια, ὡς καὶ τοῦ σημείου Γ, ἀφοῦ τὰ τρίγωνα ΑΕΓ, ΑΖΘ εἶναι ἴσα.

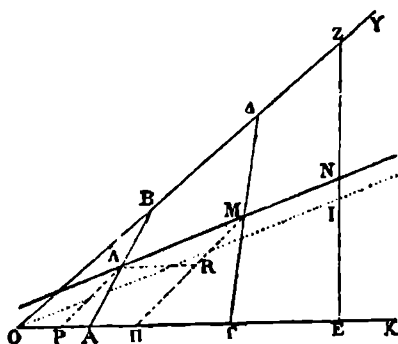
1356. Παρατήρησις. Εἰς την ἐκφώνησιν τοῦ προηγουμένου ζητήματος θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐδίδετο ἡ γωνία Β ὡς σταθερά, ὡς καὶ ὁ λόγος $\frac{BA}{B\Gamma}=\frac{\mu}{\nu}$. Ἐπειδὴ πάλιν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒ'Γ' θὰ ἦσαν ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας Β καὶ Β' ἴσας καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὰς πλευρὰς ἀναλόγους, $\frac{BA}{B\Gamma}=\frac{B'A}{B'\Gamma'}$ (Βλ., § 1351).

Θεώρημα 424—I

1357. Γενικὴ διατύπωσις. Ἐὰν ἓν ἐπίπεδον σχῆμα στρέφεται εἰς τὸ ἐπίπεδόν του περὶ ἓν ἐκ τῶν σημείων του Α καὶ μένῃ ὅμοιον ἑαυτῷ, ἐνῷ ἓν ἄλλο σημεῖον του Β γράφει δοθεῖσαν γραμμήν, τότε καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον αὐτοῦ Γ γράφει γραμμὴν ὁμοίαν τῆς δοθείσης. Αἱ δύο δὲ γραμμαὶ δύνανται νὰ καταστοῦν ὁμοιόθετοι ἀλλήλων, διὰ στροφῆς τῆς μιᾶς περὶ τὸ σημεῖον Α κατὰ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν σταθερὰν γωνίαν ΒΑΓ, δύο ἀκτίνων ΑΒ, ΑΓ τοῦ σχήματος εἰς τὴν τυχοῦσαν θέσιν αὐτοῦ. (Σχ. 863).

Τόπος 424—II

1358. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΥ, ἓν σημεῖον Α ἐπὶ τῆς μιᾶς καὶ ἓν ἄλλο Β ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ἀπὸ τῶν σημείων αὐτῶν καὶ καθ' ὡρισμένην φορὰν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν, λαμβάνομεν τμήματα ἴσα ΑΓ = ΒΔ, ΓΕ = ΔΖ κ.ο.κ. Ποῖος ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ...;



Σχ. 864.

Φέροντες τὰς παραλλήλους ΡΛ, ΜΠ, ΛR πρὸς τὰς εὐθείας ΟΧ, ΟΥ, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\Lambda P=\frac{OB}{2},\quad M\Pi=\frac{O\Delta}{2},\quad \text{ἄρα καὶ}\ MR=\frac{B\Delta}{2}.$$

Ἐπίσης,

$$OP=\frac{AO}{2},\quad O\Pi=\frac{O\Gamma}{2},\quad \text{ἄρα}\ \Lambda R=\frac{A\Gamma}{2}.$$

Εἶναι, ἐπομένως, ΛR = MR καὶ τὸ τρίγωνον ΛMR ἰσοσκελές,

ἡ δὲ εὐθεῖα ΛΜ παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον ΟΙ τῆς γωνίας ΧΟΥ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν εὐθεῖαν ΜΝ.

Ὁ ζητούμενος, συνεπῶς, τόπος τῶν σημείων Λ, Μ, Ν κλπ., εἶναι ἡ ἐκ τοῦ μέσου Λ τῆς ΑΒ παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον ΟΙ τῆς γωνίας ΧΟΥ.

Σημείωσις. Ἡ εὐθεῖα ΛΜΝ φέρει τὸ ὄνομα *εὐθεῖα τῶν μέσων*, τὸ ὁποῖον προσέδωσε εἰς αὐτὴν ὁ Chasles τὸ 1860. (*Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre*, ὑπὸ G. de Longchamps σ. 149).

Τὸ ἀνωτέρω ζήτημα δὲν εἶναι παρὰ μία εἰδικὴ περίπτωσις ἑνὸς προηγουμένου Θεωρήματος (§ 771, β).

Τόπος 424—III

1358 α. Ἐπὶ δύο εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ, λαμβάνομεν μήκη ΑΓ καὶ ΒΔ, ΓΕ καὶ ΔΖ κλπ., καθ' ὡρισμένην φορὰν καὶ ἔχοντα λόγον, ἀνὰ δύο. ἴσον πρὸς δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Λ, Μ, Ν..., τῶν διαιρούντων τὰ τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ κλπ., κατὰ τὸν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$;

Αἱ βοηθητικαὶ κατασκευαὶ καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι ὅμοιαι τῶν εἰς τὴν § 1358, σχ. 864.

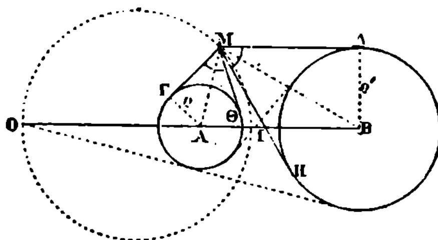
Σημείωσις. Καὶ τὸ ζήτημα τοῦτο εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ θεωρήματος ἐπὶ τῶν ἀντιστρόφως ὁμοίων σχημάτων τῆς § 1150 β. Ἡ εὐθεῖα ΛΜΝ δύναται νὰ ὀνομασθῇ ἐνταῦθα: *εὐθεῖα τῶν ἀναλόγων διαιρέσεων*.

Τόπος 425

1359. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων ἐκ τῶν ὁποίων δύο δοθέντες κύκλοι (Α) καὶ (Β) φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν;

Εἶναι φανερὸν κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ κοινὰ σημεῖα Ι καὶ Ο τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων τῶν περιφερειῶν ἀνήκουν εἰς τὸν ζητούμενον τόπον.

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου. Ἐπειδὴ γων. ΓΜΘ=ΔΜΗ,



Σχ. 865.

τὰ ἡμίση τῶν γωνιῶν αὐτῶν θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσα καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΜ καὶ ΒΔΜ ὅμοια. Ἐπομένως,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\rho}{\rho'},$$

καὶ ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν *τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν* A *καὶ* B *ἔχουν λόγον σταθερόν*, $\frac{\rho}{\rho'}$, (Νικ., Μ. Γ., § 230). Ὁ τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα OI.

1359 α. Σημείωσις. 1) Τὰ σημεῖα O καὶ I διαιροῦν ἁρμονικῶς τὴν εὐθεῖαν AB, ἡ δὲ περιφέρεια μὲ διάμετρον OI ὠνομάσθη ὑπὸ τοῦ Neuberg *περιφέρεια τοῦ Ἀπολλωνίου*.

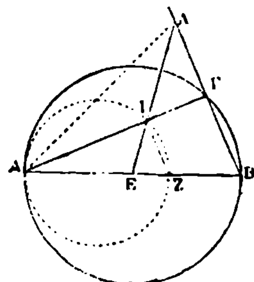
Ἡ εὕρεσις τοῦ *τόπου τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουν λόγον δοθέντα*, δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ κατὰ τρόπον κομψὸν καὶ ταχὺ διὰ τοῦ *Θεωρήματος τοῦ Stewart* (§ 1173). Βλέπε σχετικῶς τὴν ὡραίαν λύσιν τὴν ὁποίαν ἔδωσε εἰς τὸ *Bulletin de Mathématiques élémentaires*, 1896 - 97, σ. 65, ὁ J. Tannery († 1910), διευθυντὴς τότε τῶν ἐπιστημονικῶν σπουδῶν εἰς τὴν *Ecole Normale supérieure* εἰς Παρισίους.

2) Ἐὰν δοθοῦν τρεῖς περιφέρειαι, αἱ τρεῖς περιφέρειαι, αἱ ἀνάλογοι πρὸς τὴν ἀνωτέρω θεωρηθεῖσαν, τέμνονται εἰς δύο σημεῖα, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ τρεῖς δοθεῖσαι περιφέρειαι φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν (§ 1546, ε). — Βλ. σχετικὸν ἄρθρον εἰς τὰ *Annales de Gergonne*, τόμ. XX (1829—1830), σ. 305 ὑπὸ Vallès.

Τόπος 425—I

1360. Ἡ κορυφὴ Γ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μεταβλητὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον τὴν σταθερὰν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ AB. Εἰς ἑκάστην θέσιν τῆς κορυφῆς Γ, προεκτείνομεν τὴν ΒΓ εἰς μῆκος ἴσον πρὸς αὐτὴν ΓΔ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΔ, τὴν συνδέουσαν τὸ κέντρον Ε τῆς περιφερείας μετὰ τοῦ σημείου Δ.

Ποῖος ὁ τόπος τῆς τομῆς I τῶν ΕΔ καὶ ΑΓ εὐθειῶν;



Σχ. 866.

Φέρομεν τὴν ΑΔ καὶ τὴν IZ, παράλληλον πρὸς τὴν ΓΒ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, αἱ ΑΓ καὶ ΔΕ εἶναι διάμεσοι αὐτοῦ καὶ τὸ σημεῖον τομῆς των I εὑρίσκεται εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΑΓ· ἐπειδὴ δὲ ἡ IZ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΒ, τὸ σημεῖον Z εὑρίσκεται ἐπίσης εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς AB.

Εἶναι, ἑπομένως, τὸ σημεῖον Z σταθερὸν ἐπὶ τῆς AB, ἡ δὲ γωνία AIZ ὀρθή. Ὁ τόπος, συνεπῶς, τοῦ σημείου I εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον AZ.

Τόπος 426

1361. Ἐπ' εὐθείας γραμμῆς δίδονται τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων ἐκ τῶν ὁποίων τὰ τμήματα AB καὶ ΓΔ φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας;

Ἔστω M σημεῖον τοῦ τόπου τούτου. Τὰ τρίγωνα AMB, ΓΜΔ

καὶ ΑΜΓ, ΒΜΔ ἔχουν, κατὰ ζεύγη, τὰς βάσεις των ἐπ' εὐθείας καὶ γωνίας εἰς τὰς κορυφὰς ἴσας. Ἄρα

$$\frac{MA \cdot MB}{M\Gamma \cdot M\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}, \quad \frac{MA \cdot M\Gamma}{MB \cdot M\Delta} = \frac{A\Gamma}{B\Delta}.$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἰσοτήτων τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{MA^2}{M\Delta^2} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{\Gamma\Delta \cdot B\Delta} = \frac{\mu^2}{\nu^2}.$$

Αἱ βοηθητικαὶ κατασκευαὶ εἰς τὸ σχῆμα 867 δίδουν τὰ μήκη μ καὶ ν. Ἑπομένως,

$$\frac{MA}{M\Delta} = \frac{\mu}{\nu},$$

Σχ. 867

καὶ ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια $\left(A, \Delta, \frac{\mu}{\nu}\right)$ (*υ).

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω λύσις ἐλήφθη ἐκ τῆς 5ης ἐκδόσεως τῶν *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, τοῦ Catalan, σ. 196. Ὡραία λύσις εὑρίσκεται ἐπίσης εἰς τὸ *Supplément du Manuel général*, 1884, σ. 206, ὑπὸ Burat.

Ἐὰν τὰ τμήματα ΑΒ, ΓΔ δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ εἶναι καμπύλη τρίτου βαθμοῦ.

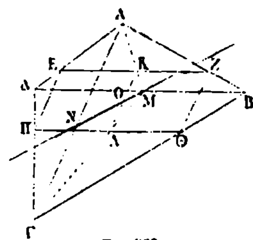
Ἡ πλήρης σπουδὴ τοῦ ζητήματος ἔγινε τὸ 1852 ὑπὸ τοῦ Steiner. (Βλ. *J. M. E.*, 1886, σ. 16· *J. M. S.*, 1895, σ. 98, E. Lebon).

Διὰ βιβλιογραφικὰς πληροφορίας, βλ. σημείωσιν τοῦ H. Brocard εἰς τὸ *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1906, σ. 227, nº 3037.

Τόπος 427

1362. **Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐγγραφομένων εἰς δοθὲν τετράπλευρον;** (A. Longchampt, Recueil de problèmes, σ. 152).

Διὰ τὴν ἐγγραφὴν παραλληλογράμμου ΖΕΗΘ εἰς δοθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἡ ΕΖ, παραλλήλως τῆς διαγωνίου ΒΔ καὶ ἡ ΖΘ, παραλλήλως τῆς ΑΓ. Αἱ ἐκ τῶν Θ καὶ Ε παράλληλοι πρὸς τὰς ἀχθείσας εὐθείας τέμνονται ἐπὶ τῆς ΓΔ.



Σχ. 868.

Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΛΚ, τῆς ἑνούσης τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ γράφουν τὰς διαμέσους ΜΑ, ΜΓ τῶν τριγώνων ΔΑΒ καὶ ΔΓΒ ἀντιστοίχως, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ μέσον Ο τῆς ΚΛ θὰ γράφῃ τὴν διάμεσον ΜΝ τοῦ τριγώνου ΑΜΓ.

(*υ). Σημ. μετ. Ἀντὶ τῆς περιφερείας (τοῦ Ἀπολλωνίου), τόπου τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν Α καὶ Δ εἶναι ἴσος πρὸς $\frac{\mu}{\nu}$.

Εἶναι δηλ. ὁ ζητούμενος τόπος ἡ εὐθεῖα ΜΝ, ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου.

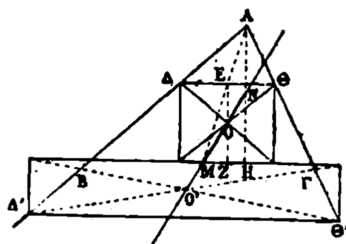
Παρατηρήσεις. 1) Αἱ προεκτάσεις τοῦ τμήματος ΜΝ ἀντιστοιχοῦν εἰς σημεῖα τοῦ τόπου διὰ παραλληλόγραμμα μὲ κορυφὰς εὑρισκομένας ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ.

2) Τὸ Θεώρημα ἀληθεύει καὶ διὰ στρεβλὸν τετράπλευρον. (Βλ. VI Βιβλίον).

Τόπος 427—I

1363. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐγγραφομένων εἰς δοθὲν τρίγωνον;

Διὰ τὴν ἐγγραφὴν ὀρθογωνίου, ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἡ παράλληλος ΔΘ πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ αἱ ἐκ τῶν Δ καὶ Θ κάθετοι ἐπ' αὐτήν. Τὸ σημεῖον τομῆς Ο τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὸ μέσον τῆς συνδεούσης τὰ μέσα δύο παραλλήλων πλευρῶν του εὐθείας ΕΖ.



Σχ. 809.

Τὸ σημεῖον Ε εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΜ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ὁ τόπος, συνεπῶς, τοῦ σημείου Ο εἶναι ἡ διάμεσος ΜΝ τοῦ τριγώνου ΑΜΗ τοῦ σχήματος ἢ ἡ εὐθεῖα, ἡ συνδέουσα τὸ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ μετὰ τοῦ μέσου τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους ΑΗ.

Παρατήρησις. Εἰς ἑκάστην πλευρὰν τοῦ τριγώνου, λαμβανομένην ὡς βάσιν, ἀντιστοιχεῖ καὶ εἷς τόπος. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, ὡς ἡ ΜΝ, αἱ ἑνοῦσαι τὸ μέσον ἑκάστης πλευρᾶς μετὰ τοῦ μέσου τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους, τέμνονται εἰς τὸ *σημεῖον τοῦ Lemoine* τοῦ τριγώνου (§ 1242 γ). (Διὰ τὴν ἀπόδειξιν, βλ. *Mathesis*, 1881, σ. 185 ἢ *J. M. E.*, 1887 σ. 117, ὡς καὶ § 1242 γ).

Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ κέντρον τριῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον ὀρθογωνίων καὶ ἀπολαμβάνει πλήθους ἰδιοτήτων (βλ. ἐπμ. § 2375). Ἐμφανίζεται δὲ ὡς τὸ μᾶλλον ἐνδιαφέρον σημεῖον τοῦ τριγώνου, μετὰ τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τὸ κέντρον βάρους.

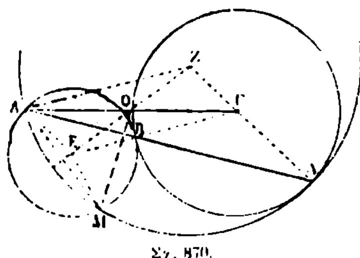
Τόπος 427—II

1364. Διὰ δοθέντος σημείου Α φέρομεν τέμνουσαν τυχοῦσαν ΑΒΔ δοθείσης περιφερείας (Γ) καὶ θεωροῦμεν τὰς περιφερείας, τὰς διερχομένας διὰ τῶν Α, Β καὶ Α, Δ καὶ ἐφαπτομένας τῆς δοθείσης. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς Μ τῶν περιφερειῶν τούτων; (N. A., 1872, σ. 469).

Τὰ κέντρα αὐτῶν Ε, Ζ εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΓΒ, ΓΔ. Τὰ τρίγωνα ΑΖΔ, ΒΓΔ, ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ὅμοια καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΖΓΕ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΕΖ καὶ ΑΓ τέμνονται εἰς τὸ μέσον των Ο. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διάκεν-

τρος ΕΖ τῶν θεωρουμένων περιφερειῶν εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς κοινῆς χορδῆς αὐτῶν ΑΜ, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι

ΟΜ = ΟΑ = ΟΓ = σταθ.


Σχ. 870.

Ὁ τόπος, ἑπομένως, τοῦ σημείου Μ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς ΑΓ.

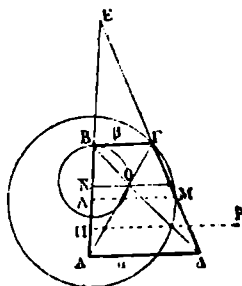
Τόπος 427—III

1364 α. Διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Α δύο περιφερειῶν (Μ), (Ν) ἐφαπτομένων ἀλλήλων, φέρομεν ζεύγη τυχουσῶν τεμνουσῶν αὐτὰς ΒΑΓ, ΔΑΕ. Ποῖος ὁ τόπος (Τ) τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν ΒΑΕ καὶ ΓΑΔ; (H. Brocard, Nouv. Correspondance math., 1877, σ. 176, ζήτ. 254 καὶ σ. 253).

Ὁ τόπος εἶναι περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν δύο δοθεισῶν εἰς τὸ σημεῖον Α. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἀντιστροφὴν μὲ πόλον τὸ σημεῖον Α· ἀναγόμεθα εἰς ζεῦγος παραλλήλων εὐθειῶν (μ), (ν), εἰς τεμνούσας αὐτῶν βΑγ, δΑε διὰ τοῦ Α καὶ εἰς τὸν τόπον (τ) τοῦ σημείου τομῆς τῶν βε καὶ δγ εὐθειῶν. Ἐπειδὴ ὁ τόπος οὗτος (τ) εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὰς (μ) καὶ (ν), ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενον τόπος (Τ) — τὸ ἀντίστροφον σχῆμα τοῦ (τ) — εἶναι περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν (Μ) καὶ (Ν) εἰς Α.

Τόπος 428

1365. Μεταβλητοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, μία τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, ἡ ΑΒ, εἶναι ὡρισμένη θέσει καὶ μεγέθει καὶ τὰ μήκη α καὶ β τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ δοθέντα. Ποῖοι οἱ τόποι τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων καὶ τοῦ μέσου τῆς τετάρτης πλευρᾶς ΓΔ τοῦ τραπεζίου;


Σχ. 871.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΛΜ, ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου, ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς $\frac{\alpha+\beta}{2}$ καὶ ὅτι

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AO}{O\Gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\S\ 1104)$$

$$NO = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \quad (\S\ 1109)$$

Ἑπομένως:

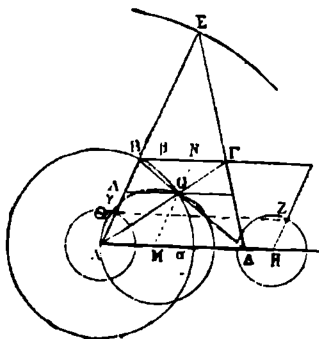
1) Ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

2) Ὁ τόπος τοῦ σημείου Ο, ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ν καὶ ἀκτῖνα $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Παρατήρησις. Πᾶν σημεῖον τῆς ΔΓΕ, τῆς ΑΓ ἢ τῆς ΔΒ, γράφει ἐπίσης περιφέρειαν, ἔχουσαν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΒΕ.

Τόπος 429

1366. Μεταβλητοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, ἡ βάσις εἶναι σταθερά, θέσει καὶ μεγέθει, ὡς καὶ τὰ μήκη β, τῆς ἄλλης βάσεως, καὶ γ, μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.



Σχ. 872

Ποῖοι οἱ τόποι τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν καὶ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων τοῦ τραπεζίου;

1) Ἀφοῦ ἡ ΑΒ ἔχει σταθερὸν μῆκος γ, τὸ σημεῖον Β γράφει τὴν περιφέρειαν (Α, γ). Ἐπειδὴ δέ:

$$\frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{α}{α-β}$$

καὶ $$ΑΕ=\frac{αγ}{α-β}=σταθ.,$$

ὁ τόπος τοῦ σημείου Ε εἶναι ἡ περιφέρεια $\left(Α,\frac{αγ}{α-β}\right)$.

2) Διὰ τὸν τόπον τοῦ σημείου Ο, φέρομεν τὰς ΟΛ, ΟΜ, παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΔ καὶ ΒΑ εὐθείας. Θὰ ἔχωμεν

$$ΑΜ=ΛΟ=\frac{αβ}{α+β} \qquad (§\ 1109)$$

$$\frac{ΟΜ}{ΜΝ}=\frac{ΟΔ}{ΒΔ}=\frac{α}{α+β} \text{ ἢ } \frac{ΟΜ}{γ}=\frac{α}{α+β} \text{ καὶ } ΟΜ=\frac{αγ}{α+β}=σταθ.$$

Εἶναι, ἑπομένως, ὁ τόπος τοῦ σημείου Ο ἡ περιφέρεια $\left(Μ,\frac{αγ}{α+β}\right)$.

Τόπος 429—I

1367. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου Ζ, τοῦ συνδεομένου πρὸς τὸ τραπέζιον διὰ παραλλήλου ΖΘ πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ, σταθεροῦ μήκους λ καὶ διερχομένης διὰ δοθέντος σημείου Θ τῆς ΑΒ; (Σχ. 872).

Τὸ σημεῖον Θ γράφει τὴν περιφέρειαν (Α, ΑΘ)· ἑπομένως, τὸ σημεῖον Ζ γράφει τὴν περιφέρειαν (Η, ΗΖ), ὅπου ΑΗ = λ καὶ ΗΖ = ΑΘ (§ 58).

Τόπος 429—II

1368. Μεταβλητοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, ἡ βάσις ΑΔ εἶναι ὡρισμένη, θέσει καὶ μεγέθει, ἡ ἄλλη βάσις ΒΓ δοθέντος μήκους β καὶ ἡ κορυφὴ Β κινητὸν σημεῖον ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ΒΒ'' ἢ περιφερείας (κ).

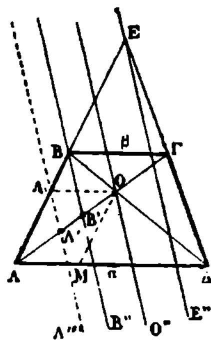
Ποῖοι οἱ τόποι τοῦ σημείου Ε, τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν καὶ τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν διαγωνίων τοῦ τραπεζίου;

Έστω Λ ἡ τομὴ τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ τοῦ Ο παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις εἰς τὴν τυχοῦσαν θέσιν τοῦ τραπεζίου. Ἐπειδή,

$$\frac{ΑΛ}{ΑΒ}=\frac{ΑΟ}{ΑΓ}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\gamma_1,\quad \frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}=\gamma_2,$$

τὰ σημεῖα Λ καὶ Ε γράφουν τὰ ὁμοιόθετα σχήματα τοῦ τόπου ΒΒ'' τοῦ σημείου Β, κατὰ τὰς ὁμοιοθεσίας μὲ κέντρον Α καὶ λόγους $\frac{ΑΛ}{ρ}=\gamma_1$ καὶ $\frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\gamma_2$ ἀντιστοίχως. Οἱ τόποι, ἄρα, τῶν σημείων Λ καὶ Ε εἶναι αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΒ'' εὐθεῖαι ΛΛ'' καὶ ΕΕ''.

Καὶ ἐπειδὴ $ΛΟ=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\gamma_3$, ὁ τόπος τοῦ σημείου Ο εἶναι ἡ εὐθεῖα ΟΟ'', προκύπτουσα ἐκ τῆς ΛΛ'', διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς αὐτῆς κατὰ τό, ὡρισμένης διευθύνσεως καὶ μήκους, τμῆμα ΛΟ.

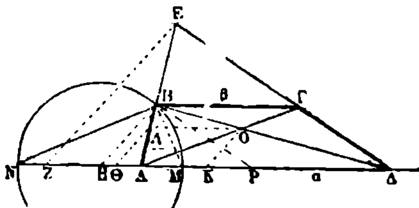


Σχ. 873.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Β γράφῃ περιφέρειαν (κ), τὰ Λ καὶ Ε γράφουν περιφερείας ὁμοιοθέτους αὐτῆς καὶ τῶν ὁποίων τὸ Α θὰ εἶναι τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας. Τὸ δὲ σημεῖον Ο θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ περιφερείας ἴσης πρὸς τὴν γραφομένην ὑπὸ τοῦ Λ καὶ προκυπτούσης ἐξ αὐτῆς διὰ τῆς ἰδίας, ὡς καὶ προηγουμένως, παραλλήλου μεταφορᾶς.

Τόπος 429—III

1369. Δίδεται ἡ βάσις ΑΔ μεταβλητοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, τὸ μῆκος β τῆς ἄλλης βάσεως ΒΓ, ὡς καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν μὴ παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν καὶ ποῖος ὁ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων τοῦ τραπεζίου αὐτοῦ;



Σχ. 874

Κατὰ τὰ προηγούμενα παραδείγματα, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν τόπον τὸν γραφόμενον ὑπὸ τυχόντος σημείου τῆς ΑΒ, λ. χ. ὑπὸ τοῦ Β. Φέρομεν πρὸς τοῦτο τὴν ΒΡ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ.

Τὸ σημεῖον Ρ εἶναι σταθερόν, ἀφοῦ $ΑΡ=\alpha-\beta$, καὶ

$$\frac{ΒΑ}{ΒΡ}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Εἶναι, ἐπομένως, ὁ τόπος τοῦ Β ἡ περιφέρεια

$$\left(Α,\ Ρ,\ \frac{\mu}{\nu}\right).$$

Καὶ ἐπειδή: $\frac{ΕΑ}{ΕΔ} = \frac{ΒΑ}{ΒΡ} = \frac{μ}{ν}$,

ὁ τόπος τοῦ Ε εἶναι ὁμοίως, ἡ περιφέρεια $\left(Α, Δ, \frac{μ}{ν}\right)$.

Ἂν ΒΜ, ΒΝ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΑΒΡ καὶ τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς, ὁ τόπος τοῦ σημείου Β εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΜΝ καὶ τῆς ὁποίας ἔστω ΗΒ ἡ ἀκτίς. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων τοῦ σχήματος φαίνεται ἀμέσως ὅτι τὰ μήκη ΕΖ καὶ ΟΚ = ΛΘ εἶναι σταθερά, ὡς καὶ τὰ σημεῖα Ζ, Κ καὶ Θ. Εἶναι κατὰ συνέπειαν οἱ τόποι τῶν σημείων Ε, Λ, Ο αἱ περιφέρειαι (Ζ, ΕΖ), (Θ, ΘΛ) καὶ (Κ, ΚΟ) ἀντιστοίχως.

Τόπος 429—IV

1370. Εἰς τὸ ἴδιον ζήτημα, τὰ μήκη τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $ΑΒ^2 \pm ΓΔ^2 = k^2$ ἀντὶ τῆς $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{μ}{ν}$.

Ὁρίζομεν πάλιν τὸν τόπον τοῦ σημείου Β εἰς ἑκάστην περίπτωσιν.

Διὰ $ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = k^2$, ὁ τόπος τοῦ Β εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΡ (§ 69). Διὰ $ΑΒ^2 - ΓΔ^2 = k^2$, ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἐκ ζεύγους καθέτων εὐθειῶν ἐπὶ τὴν ΑΡ (*Μέθοδοι*, § 71).

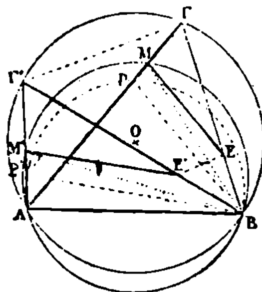
Τόπος 430

1371. Μεταβλητοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ τέμνονται εἰς σημεῖον Ο σταθερόν. Μία τούτων, ἡ ΑΒ, εἶναι σταθερά, θέσει καὶ μεγέθει, ἡ δὲ ἄλλη ἔχει σταθερὰν θέσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΓΔ, στρεφομένης περὶ τὸ σημεῖον Ο. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἢ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων τῶν τετραπλεύρων τούτων;

(*Μέθοδοι*, § 84).

Τόπος 430—I

1372. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ βάσις ΑΒ εἶναι σταθερά, θέσει καὶ μεγέθει, ἡ δὲ ἀπέναντι γωνία Γ σταθεροῦ μεγέθους. Ἐπὶ τῆς ΓΒ θεωροῦμεν σημεῖον Ε διαιροῦν τὸ ἑκάστοτε μῆκος της κατὰ δοθέντα λόγον $\frac{μ}{ν}$ καὶ φέρομεν δι' αὐτοῦ εὐθεῖαν ΕΜ μέχρι τῆς πλευρᾶς ΓΑ καὶ τέμνουσαν αὐτὴν κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν ΑΜΕ. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ;



Σχ. 875.

Ἔστωσαν Γ, Γ' δύο διάφοροι θέσεις τῆς κορυφῆς Γ. Ἐπειδὴ

$\frac{ΒΕ}{ΕΓ} = \frac{ΒΕ'}{Ε'Γ'} = \frac{μ}{ν}$, γων. ΑΜ'Ε'=ΑΜΕ,

τὰ τρίγωνα ΕΜΓ, Ε'Μ'Γ' εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ τρίγωνα ΒΜΕ, ΒΜ'Ε', ἔχοντα μίαν γωνίαν

ἴσην, Ε=Ε΄ καὶ τὰς περιεχούσας πλευρὰς ἀναλόγους. Εἶναι, ἑπομένως, γων. ΑΜ΄Β = ΑΜΒ καὶ ὁ τόπος τοῦ Μ κυκλικὸν τόξον περιγεγραμμένον εἰς τὸ τρίγωνον ΑΜΒ, εἰς τὴν τυχοῦσαν θέσιν τοῦ Μ.

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ παράλληλος ΒΡ πρὸς τὴν ΕΜ ὁρίζει σημεῖον Ρ γράφον τὸ κυκλ. τόξον ΑΡ΄ΡΒ. Καὶ ἐπειδὴ πρὸς τούτοις,

$$\frac{\text{ΜΡ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{\text{Μ΄Ρ΄}}{\text{Μ΄Γ΄}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\mu}{\nu},$$

συμπεραίνομεν ὅτι:
Ἐὰν διὰ τοῦ ἑνὸς Α τῶν σημείων τομῆς δύο περιφερειῶν ΑΡΒ, ΑΓΒ, φέρωμεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΡΓ καὶ διαιρέσωμεν τὸ τμῆμα ΡΓ αὐτῆς κατὰ λόγον δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$, ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ θὰ εἶναι περιφέρεια, διερχομένη διὰ τῶν Α καὶ Β (§ 1279).

Θεώρημα καὶ Τόπος 430—II

1372 α. Προβάλλομεν τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ εἰς Α΄, Β΄, Γ΄ ἐπὶ τυχούσης εὐθείας (ε) τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ καὶ φέρομεν, ἀκολούθως, τὰς εὐθείας Α΄Α΄΄, Β΄Β΄΄, Γ΄Γ΄΄, καθέτους, ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΒΑ.

1) *Αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον* Μ (J. Neuberg).

2) *Ἐὰν ἡ εὐθεῖα* (ε) *διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου* Ο *τῆς περιφερείας* ΑΒΓ, *τὸ σημεῖον* Μ *εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου* ΑΒΓ (Soons).

(*Mathesis*, 1896, σ. 57).

Τόπος 430—III

1372 β. Εἰς περιφέρειαν, μία χορδὴ ΑΒ εἶναι σταθερὰ θέσει καὶ ἄλλης ΓΔ, σταθερᾶς μεγέθει, τὰ ἄκρα αὐτῆς εἶναι μεταβλητὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ζητοῦνται οἱ τόποι:

1) *Τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου* ΑΒΓΔ.
2) *Τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἑνουσῶν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ.*
3) *Τοῦ σημείου τοῦ Mathot* (§ 1277 β) *τοῦ τετραπλεύρου.*

Οἱ τόποι οὗτοι εἶναι περιφέρειαι εὐκόλως ὁριζόμεναι.

Σχέσεις μεταξὺ γινομένων ἢ τετραγώνων

Τόπος 431

1373. Διὰ δοθέντος σημείου Ο φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, συναντῶσαν δοθεῖσαν ἄλλην εἰς Μ καὶ ἐπὶ τῆς ΟΜ λαμβάνομεν σημεῖον Ν τοιοῦτον, ὥστε ΟΜ . ΟΝ = k^2, σταθερόν. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Ν;

(*Μέθοδοι*, §§ 67 καὶ 68, 2), 3)).

Τόπος 431—I

1374. Δοθέντων σημείου Α καὶ εὐθείας (ε), φέρομεν διὰ τοῦ Α τέμνουσαν ΑΜ τῆς εὐθείας τυχοῦσαν καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾿ αὐτῆς σημεῖον Ν τοιοῦτον, ὥστε

$$\text{ΑΜ} . \text{ΑΝ} = k^2 = 2\,\text{ΑΔ}^2,$$

ὅπου Δ ὁ πούς τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὴν (ε). Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Ν;

Τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ προβλήματος τούτου, ἐν σχέσει πρὸς τὸ προηγούμενόν του, ἔγκειται εἰς τὴν εἰδικὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς k.

Ἔστω Β τὸ συμμετρικὸν σημεῖον τοῦ Α πρὸς τὴν (ε). Ὁ τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΑΒ. Ἐὰν ρ εἶναι ἡ ἀπόστασις ΑΔ, θὰ ἔχωμεν

$$k^2 = ΑΔ \,.\, ΑΒ = ρ \,.\, 2ρ = 2ρ^2 =$$
$$= ΔΑ^2 + ΔΓ^2 = ΑΓ^2 \quad \text{καὶ} \quad k = ΑΓ.$$

Τὰ τρίγωνα ΑΔΜ καὶ ΑΝΒ εἶναι προφανῶς ὅμοια. Συνεπῶς

$$\frac{ΑΜ}{ΑΒ} = \frac{ΑΔ}{ΑΝ}$$

ἢ $ΑΜ \,.\, ΑΝ = ΑΔ \,.\, ΑΒ = k^2.$

Καὶ ἀπ' εὐθείας δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι

$$ΑΜ \,.\, ΑΝ = ΑΓ^2 = k^2.$$

Σχ. 870

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΓΜ, ΑΓΝ ἔχουν τὴν γωνία Α κοινὴν καὶ τὰς εἰς Μ καὶ Ν ἴσας, ἀφοῦ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι, ἀντιστοίχως

$$\frac{\overset{\frown}{ΑΕ} - \overset{\frown}{ΝΓ}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ΑΝ}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\overset{\frown}{ΑΝ}}{2}.$$

Εἶναι ἄρα ὅμοια καὶ συνεπῶς

$$\frac{ΑΜ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΑΝ} \quad ἢ \quad ΑΜ \,.\, ΑΝ = ΑΓ^2 = k^2.$$

Παρατήρησις. Γραφικῶς, ἀναγνωρίζομεν ἀμέσως ὅτι, εἰς τὴν ἐνδιαφέρουσαν ταύτην περίπτωσιν, ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα κ τέμνει τὴν εὐθεῖαν (ε) εἰς τρόπον, ὥστε

$$ΑΔ = ΔΓ = ΔΕ.$$

Τὸ ἀνωτέρω ζήτημα εἶναι οὐσιαστικῶς τὸ ἴδιον μὲ τὸ τῆς § 1294.

Τόπος 431—II

1375. **Γωνία ΜΑΝ στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της Α διατηροῦσα σταθερὸν μέγεθος, ἐνῷ τὸ ἄκρον Ν τῆς πλευρᾶς ΑΝ γράφει δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἢ περιφέρειαν. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ ἄκρου Μ τῆς πλευρᾶς ΑΜ ἐὰν τὸ γινόμενον ΑΜ . ΑΝ διατηρεῖ σταθερὰν πάντοτε τιμὴν κ², ἢ ἐὰν ὁ λόγος ΑΜ, ΑΝ εἶναι σταθερός;**

(Βλ. §§ 1349 καὶ 1351).

Τόπος 431—III

1376. **Διὰ σημείου Δ, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν περιφερείας (Ο), φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΒΔΓ καὶ κατασκευάζομεν τρίγωνον ὀρθογώνιον ΑΒΓ,**

ἔχον ὑποτείνουσαν ΒΓ καὶ κορυφὴν Α προβαλλομένην ἐπ' αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ποῖος ὁ τόπος τῆς κορυφῆς ταύτης;

Θὰ ἔχωμεν $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι σταθερὸν διὰ πάσας τὰς διὰ τοῦ Δ χορδάς, ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Α θὰ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα

$$\sqrt{ΒΔ \cdot ΔΓ} = \sqrt{ρ^2 - δ^2}.$$

Παρατήρησις. Ἡ χορδὴ ΜΝ, κάθετος ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ Δ διάμετρον, εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ τόπου· ἐπειδὴ

$$ΔΜ^2 = ΔΕ \cdot ΔΖ = ΔΒ \cdot ΔΓ.$$

Σχ. 877.

Τόπος 431—IV

1377. Διὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ κέντρου ὁμοιότητος Ι δύο περιφερειῶν φέρομεν εὐθεῖαν ΒΓΙΓ'Β'. Τὰ Β, Β' καὶ Γ, Γ' εἶναι ὁμόλογα σημεῖα ἐνῶ τὰ Β, Γ' ἢ Γ, Β' ἀντιομόλογα. Ποῖος ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Α τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ', τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α προβάλλεται ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης εἰς τὸ Ι;

Ἀνάλογον πρὸς τὸ προηγούμενον ζήτημα. Ὁ τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια (Ι, ΙΑ), ἀφοῦ τὸ γινόμενον ΙΒ . ΙΓ' εἶναι σταθερόν, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

Τόπος 431—V

1378. Ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ὑψοῦμεν κάθετον τυχοῦσαν ΔΕΜΖ, τέμνουσαν τὰς ΒΓ, ΒΑ, ΓΑ, εἰς τὰ Δ, Ε, Ζ, ἀντιστοίχως, σημεῖα. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ τῆς εὐθείας ταύτης, τοῦ τοιούτου, ὥστε $ΔΜ^2 = ΔΕ \cdot ΔΖ$;

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων: ΓΔΖ καὶ ΔΒΕ, εὑρίσκομεν

$$\frac{ΓΔ}{ΔΕ} = \frac{ΔΖ}{ΒΔ} \quad ἢ \quad ΔΕ \cdot ΔΖ = ΔΓ \cdot ΔΒ.$$

Σχ. 878.

Ἐπομένως $ΔΜ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$

καὶ ὁ τόπος τοῦ Μ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΒΓ, ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Τόπος 431—VI

1379. Ἐπὶ καθέτου ΔΕΖ ἐπὶ εὐθεῖαν δοθεῖσαν ΒΔΓ, λαμβάνομεν σημεῖα Ε, Ζ, τοιαῦτα, ὥστε ΔΕ . ΔΖ = ΔΒ. ΔΓ. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς Α τῶν εὐθειῶν ΒΕ καὶ ΓΖ;

Τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ὁ τόπος ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΒΓ.

Τόπος 431—VII

1380. Ἐπὶ εὐθείας ΓΒ ὑψοῦμεν κάθετον ΔΖ, φέρομεν τὴν εὐ-

θεῖαν ΓΖ καὶ ἐπὶ ταύτης λαμβάνομεν σημεῖον Α, τοιοῦτον ὥστε

$$ΓΑ . ΓΖ = ΓΔ . ΓΒ.$$

Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου τούτου;

Εἶναι ἡ περιφέρεια ΒΑΓ, ἡ ἀντίστροφος τῆς εὐθείας ΔΖ. Θὰ ἔχωμεν:

$$ΒΕ . ΒΑ = ΒΔ . ΒΓ \quad καὶ \quad ΒΕ . ΑΕ = ΔΕ . ΖΕ \quad (Σχ. 878).$$

Τόπος 432

1381. **Δίδεται τρίγωνον ἰσοσκελὲς ΑΒΓ καὶ ζητεῖται ὁ τόπος τῶν σημείων Μ, τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῆς βάσεως εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.**

(*Μέθοδοι*, § 86).

Τόπος 433

1382. **Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α, λαμβάνομεν ζεῦγος σημείων Δ, Ζ, τοιούτων, ὥστε**

$$ΑΔ . ΑΖ = ΑΒ . ΑΓ.$$

Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ, τομῆς τῶν ΒΔ καὶ ΓΖ εὐθειῶν;

Ἔστω $\quad ΑΖ . ΑΔ = ΑΓ . ΑΒ.$

1η Λύσις. Ἐκ τῆς ἀσκήσεως 400 (§ 1298), δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων Μ εἶναι περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ, ὡς καὶ διὰ τῶν συμμετρικῶν αὐτῶν Θ, Η πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α. Ἡ ἀπόδειξις, ἄλλωστε, εἶναι πολὺ ἁπλῆ.

Σχ. 879

2α Λύσις. Ἐκ τῆς ἰσότητος

$$ΑΖ . ΑΔ = ΑΓ . ΑΒ$$

ἕπεται ἡ ἀναλογία

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΖ} \cdot$$

εἶναι, ἄρα, τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΓΖ ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς ἀναλόγους. Κατὰ συνέπειαν,

$$\widehat{Γ} = \widehat{Δ}, \quad \widehat{Ζ} = \widehat{ΑΒΔ}.$$

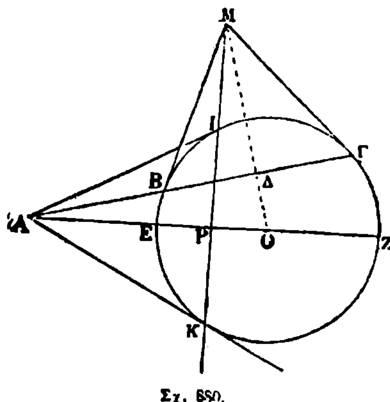
Ἡ γωνία Μ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Δ + Ζ καὶ ἴση πρὸς τὴν ΒΑΔ, παραπληρωματικὴν τῆς Δ + ΑΒΔ. Ὁ ζητούμενος ἑπομένως τόπος εἶναι τὸ k τόξον, τὸ διερχόμενον διὰ τῶν Β, Γ καὶ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς ΒΑΔ.

Παρατήρησις. Εἰς τὸν τόπον ἀνήκουν καὶ τὰ σημεῖα Η καὶ Θ. Ἐπειδή:

$$γων. \ ΒΗΓ = ΓΑΖ = ΒΑΔ = ΑΘΓ = Μ.$$

Τόπος 434

1383. Ἐκ σημείου δοθέντος Α φέρομεν τέμνουσαν τυχοῦσαν ΑΒΓ δοθείσης περιφερείας (Ο) καὶ θεωροῦμεν τὸ σημεῖον τομῆς Μ τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας εἰς τὰ Β καὶ Γ. Τίς ὁ τόπος τοῦ σημείου τούτου ὅταν ἡ τέμνουσα στρέφεται περὶ τὸ Α;



Σχ. 880.

Ἔστω ΜΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΟ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΔΑ, ΟΡΜ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς εἰς τὸ Ο ὀξείας γωνίας ἴσας. Συνεπῶς:

$$\frac{OA}{O\Delta} = \frac{OM}{OP}$$

ἢ ΟΑ . ΟΡ = ΟΔ . ΟΜ. (1)

Ἐπειδὴ ἡ ΟΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ἐπαφῶν ΒΓ, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΓΜ θὰ ἔχωμεν

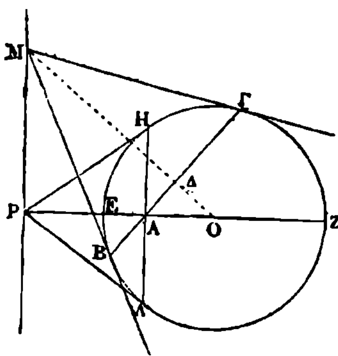
$$O\Gamma^2 = OM \, . \, O\Delta. \quad (2)$$

Ἄρα, ἐκ τῶν (1) καὶ (2),

$$OA \, . \, OP = O\Gamma^2 \quad \text{ἢ} \quad OP = \frac{O\Gamma^2}{OA} = \text{μῆκος σταθ.},$$

καὶ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Ρ, ἀπέχον τοῦ Ο ἀπόστασιν $OP = \frac{O\Gamma^2}{OA}$.

Παρατηρήσεις. 1) Ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω διατύπωσιν τοῦ προβλήματος, τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας τμῆμα ΙΚ τῆς εὐθείας ΜΡ δὲν ἀνήκει προφανῶς εἰς τὸν τόπον ἤ, τοὐλάχιστον, δὲν ἀντιστοιχεῖ εἰς σημεῖα τομῆς πραγματικῶν ἐφαπτομένων. Ὑπάρχει ὅμως γενικωτέρα διατύπωσις αὐτοῦ (Θ., n° 802) συμφώνως πρὸς τὴν ὁποίαν ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἐκ πάντων τῶν σημείων τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας.



Σχ. 881.

2) Ἐὰν τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας ἡ εὐθεῖα τῶν σημείων Μ εἶναι ἐξωτερικὴ αὐτῆς (Σχ. 881).

Ἀντίστροφον Θεώρημα 434—I

1384. Δοθεισῶν περιφερείας (Ο, ρ) καὶ εὐθείας (ε), αἱ χορδαὶ τῶν ἐπαφῶν τῶν ἐκ τῶν σημείων Μ τῆς εὐθείας ἀγομένων ἐφαπτομένων τῆς

περιφερείας (Ο) διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου Α. Τὸ σημεῖον τοῦτο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου ΟΡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν καὶ εἰς ἀπόστασιν ΟΑ ἴσην πρὸς $\frac{\text{ΟΓ}^2 = \rho^2}{\text{ΟΡ}}$ (Σχ. 880, 881).

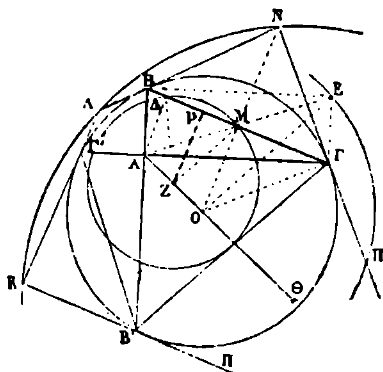
Ὑπενθυμίζομεν ὅτι, ἀναφορικῶς πρὸς τὴν περιφέρειαν (Ο), τὸ σημεῖον Α εἶναι ὁ *πόλος* τῆς εὐθείας (ε), αὕτη δὲ ἡ *πολικὴ* εὐθεῖα τοῦ Α. Ἐὰν τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας, τὸ σημεῖον Ρ εἶναι ἐσωτερικὸν αὐτῆς καὶ ἀντιστρόφως.

Αἱ πολικαὶ εὐθεῖαι τῶν σημείων τῆς περιφερείας εἶναι αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα.

1385. Παρατήρησις. Τοῦ ἀνωτέρου θεωρήματος ([81]) ὁ Monge ἔδωσε μίαν πολὺ ἁπλῆν ἀπόδειξιν, βασιζομένην ἐπὶ τῆς χρήσεως *βοηθητικῶν στερεῶν* (§ 169):

Θεωρήσωμεν τὴν σφαῖραν (Σ) τὴν διερχομένην διὰ τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ ἔχουσαν αὐτὴν μέγιστον κύκλον. Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ τῶν ἐπαφῶν ΒΓ τῶν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς εὐθείας (ε) ἀγομένων ἐφαπτομένων πρὸς τὴν περιφέρειαν (Ο), ἀνήκει προφανῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας (μ), καθ' ἣν ὁ κῶνος τῶν ἐκ τοῦ Μ ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας (Σ) ἐφάπτεται αὐτῆς, ἓν δὲ ζεῦγος τῶν ἐφαπτομένων τούτων ἀνήκει ἐπίσης καὶ εἰς τὸ ζεῦγος τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς (Σ), τῶν ἀγομένων διὰ τῆς (ε) (μία ἐφ' ἑκάστου), γίνεται φανερὸν ὅτι πᾶσαι αἱ περιφέρειαι (μ) διέρχονται διὰ τῶν δύο σημείων Χ, Υ, εἰς ἃ τὰ ἐφαπτόμενα ταῦτα ἐπίπεδα ἐφάπτονται τῆς σφαίρας.

Ἡ εὐθεῖα αὕτη ΧΥ ([82]) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) τῆς περιφερείας (Ο) εἰς σημεῖον αὐτοῦ Α. Καὶ ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΒΓ ἀνήκουσιν καὶ εἰς τὸ (Π) καὶ εἰς τὰ διάφορα ἐπίπεδα (μ), ἕπεται ἀναγκαίως ὅτι θὰ διέρχωνται πᾶσαι διὰ τοῦ σημείου τούτου Α.



Σχ. 882.

Τόπος 435

1386. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α εἶναι σταθερὸν σημεῖον αἱ δὲ Β καὶ Γ μεταβλητὰ ἐπὶ δοθείσης περιφερείας (Ο);

Ὡς εἴδομεν εἰς τὸ θεώρημα τῆς § 749 τοῦ ΙΙ Βιβλίου, ὁ τόπος εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ μέσον Ζ τῆς ΑΟ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ζ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ τόπου.

---

81. Σημ. μετ. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι ἐξωτερικὴ τῆς περιφερείας (Ο).

82. Σημ. μετ. Καλουμένη *ἀντίστροφος πολικὴ* τῆς εὐθείας (ε) πρὸς τὴν σφαῖραν (Σ).

Δυνάμεθα ἐν τούτοις νὰ ἀνεύρωμεν ἀπ' εὐθείας τὸν τόπον τοῦτον καὶ νὰ δώσωμεν οὕτω μίαν νέαν ἀπόδειξιν τοῦ προαναφερθέντος θεωρήματος.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ, ἡ διάμεσος ΑΜ εἶναι ἴση πρὸς ΜΓ· ἀφ' ἑτέρου $ΟΜ^2 + ΜΓ^2 = ρ^2$ ἢ $ΑΜ^2 + ΟΜ^2 = ρ^2$. Ὁ τόπος, ἑπομένως, τῶν σημείων Μ εἶναι ὁ ἴδιος μὲ τὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Ο εἶναι σταθερὸς $ρ^2$. Εἶναι δηλ. ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ μέσον Ζ τῆς ΑΟ καὶ ἀκτῖνα λ (ὑπολογιζομένην ἐκ τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου) ἴσην πρὸς

$$λ = \sqrt{\frac{ρ^2 - \frac{ΑΟ^2}{2}}{2}}.$$

(§ 69 καὶ ἐπμ. § 1394).

Τόπος 435—Ι

1387· **Εἰς τὸ ἴδιον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 882), ποῖος ὁ τόπος τῆς προβολῆς Δ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν;**

Γνωρίζομεν (§ 749), ὅτι ὁ τόπος εἶναι ἡ ἰδία πρὸς τὴν προηγουμένην περιφέρεια. Καὶ ἐκ τοῦ σχήματος ἄλλωστε φαίνεται ὅτι ΖΔ = λ· ἐπειδὴ ἡ κάθετος ΖΡ ἐπὶ τὴν ΔΜ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΜΔ καὶ ΖΔ = ΖΜ = λ.

Τόπος 435—ΙΙ

1388. **Εἰς τὸ ἴδιον ζήτημα, ποῖος ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Ε τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΕΓ;**

$$ΑΕ = 2\,ΑΜ, \quad ΑΟ = 2\,ΑΖ.$$

Ἄρα, ΟΕ = 2 ΖΜ = 2λ καὶ ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια (Ο, 2λ).

Ἐκ τῶν προηγουμένων δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν καὶ τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα:

Θεωρήματα 435—ΙΙΙ

1389. **Διὰ τῶν κορυφῶν τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου ΒΓΒ'Γ' καὶ τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους ταύτας. Αἱ κορυφαὶ τοῦ οὕτω σχηματιζομένου ὀρθογωνίου εὑρίσκονται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου πρὸς τὴν ΒΓΒ'Γ'.**

Ἐπειδὴ αἱ κορυφαὶ τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ εἶναι τὰ σημεῖα Ε τοῦ προηγουμένου ζητήματος (Σχ. 882).

1390. **Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἀποκτᾷ μέγιστον ἐμβαδὸν ὅταν αἱ διαγώνιοι ΒΒ', ΓΓ' εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.**

Σχηματίζουν τότε πρὸς τὴν ΟΑ γωνίας 45°.

1391. **Τὰ τετράπλευρα ΒΓΒ'Γ', τὰ προκύπτοντα διὰ στροφῆς τοῦ ζεύγους τῶν καθέτων εὐθειῶν ΒΒ', ΓΓ' περὶ τὸ σημεῖον Α, ἔχουν πάντα τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους.**

Τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὸ τρίτον τῆς ΟΑ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο. (*J. M. E.*, 1881, σ. 236, n° 6· 1879, σ. 365, σημείωσις ὑπὸ R. Malloizel).

Τόπος 435—IV

1392. Εἰς τὸ ἴδιον ζήτημα καὶ σχῆμα (§ 1386, σχ. 882), ποῖος ὁ τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Ν τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ Β καὶ Γ τῆς περιφερείας (Ο);

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΓΝ, λαμβάνομεν

$$ΟΜ \,.\, ΟΝ = ΟΓ^2 = ρ^2.$$

Ὁ τόπος, ἑπομένως, τῶν σημείων Ν εἶναι ἡ ἀντίστροφος περιφέρεια τῆς (Ζ, λ) ἐν τῇ ἀντιστροφῇ μὲ πόλον Ο καὶ δύναμιν $k^2 = ρ^2$.

Τὸ τετράπλευρον ΗΚΛΝ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ ὀρθοδιαγωνίου τετραπλεύρου ΒΓΒ'Γ' εἶναι ἐγγράψιμον, αἱ δὲ διαγώνιοί του διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Α (§ 1274).

Τόπος 436

1393. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο εὐθειῶν ὀρθογωνίων ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2;

(*Μέθοδοι*, § 72).

Τόπος 437

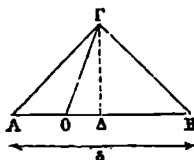
1394. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2;

(*Μέθοδοι*, § 69).

Διὰ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων, βλ. § 1397.

Τόπος 437—I

1395. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Γ, τῶν τοιούτων, ὥστε $2ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = k^2$;



Σχ. 883.

Ἔστω Γ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου καὶ Ο σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΓ καὶ ΒΟΓ εὑρίσκομεν

$$ΓΑ^2 = ΓΟ^2 + ΟΑ^2 + 2\,ΟΑ \,.\, ΟΔ \qquad (1)$$

$$ΓΒ^2 = ΓΟ^2 + ΟΒ^2 - 2\,ΟΒ \,.\, ΟΔ \qquad (2)$$

ἄρα καὶ

$$k^2 = 2\,ΓΑ^2 + ΓΒ^2 = 2\,ΟΑ^2 + ΟΒ^2 + $$
$$+ 3\,ΓΟ^2 + 2\,ΟΔ\,(2\,ΟΑ - ΟΒ). \qquad (3)$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον Ο ἐκλεγῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τρόπον, ὥστε $2\,ΟΑ = ΟΒ$, δηλ. εἰς θέσιν τοιαύτην, ὥστε

$$ΟΑ = \frac{δ}{3}, \quad ΟΒ = \frac{2δ}{3}$$

ὁ τέταρτος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (3) μηδενίζεται καὶ θὰ ἔχωμεν

$$ΓΟ^2 = -\frac{2ΟΑ^2 + ΟΒ^2 - κ^2}{3} = -\frac{2 \cdot \frac{δ^2}{9} + \frac{4δ^2}{9} - κ^2}{3} =$$

$$= \frac{3κ^2 - 2δ^2}{9} = \text{σταθερὰ ποσότης.}$$

Ὁ τόπος, ἑπομένως, τῶν σημείων Γ θὰ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα

$$ΓΟ = \sqrt{\frac{3κ^2 - 2δ^2}{9}}.$$

Τόπος 437—II

1396. (Γενίκευσις τοῦ προηγουμένου). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Γ, τῶν τοιούτων, ὥστε $μΑΓ^2 + νΒΓ^2 = κ^2$; Κατ' ἐπέκτασιν τοῦ προηγουμένου ζητήματος καὶ κατ' ἀναλογίαν, ἂς διαιρέσωμεν τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν:

$$ΟΑ = \frac{νδ}{μ + ν}, \quad ΟΒ = \frac{μδ}{μ + ν}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῶν προηγουμένων (1) καὶ (2) ἰσοτήτων ἐπὶ μ καὶ ν ἀντιστοίχως καὶ προσθέτοντες, εὑρίσκομεν

$$μΓΑ^2 + νΓΒ^2 = κ^2 = \frac{μν(μ + ν)δ^2}{(μ + ν)^2} + (μ + ν)ΓΟ^2.$$

Εἶναι, ἑπομένως, ὁ τόπος τῶν σημείων Γ ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα

$$ΓΟ = \sqrt{\left(\frac{κ^2}{μ + ν} - \frac{μν}{(μ + ν)^2}δ^2\right)}$$

Παρατήρησις. Οἱ δύο ἀνωτέρω τόποι εἶναι ἐφαρμογαὶ τοῦ Θεωρήματος τοῦ Stewart (§ 1173).

Τόπος 437—III

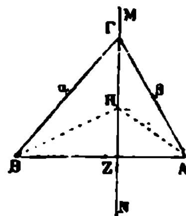
1397. Τόπος τῶν σημείων Γ τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εἶναι δοθὲν τετράγωνον k^2.

(*Μέθοδοι*, § 71).

1397 α. Παρατηρήσεις. 1) Διὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Η τῆς (μιᾶς ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν τοῦ τόπου) ΜΝ, θὰ ἔχωμεν

$$ΗΒ^2 - ΗΑ^2 = ΓΒ^2 - ΓΑ^2 = α^2 - β^2.$$

2) Ἐκ τῆς προηγουμένης παρατηρήσεως ὁδηγούμεθα εἰς μίαν πολὺ κομψὴν ἀπόδειξιν τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος: *Τὰ ὕψη παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.*



Σχ. 884.

Ἔστω πράγματι Η τὸ σημεῖον τομῆς δύο ὑψῶν ΑΔ, ΒΕ· θὰ ἔχωμεν:

$$HB^2 - H\Gamma^2 = \gamma^2 - \beta^2,$$

$$H\Gamma^2 - HA^2 = \alpha^2 - \gamma^2,$$

ἄρα καὶ

$$HB^2 - HA^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Δηλ. τὸ σημεῖον Η ἀνήκει εἰς τὸ τρίτον ὕψος ΓΖ.

Σχ. 885.

Τόπος 438

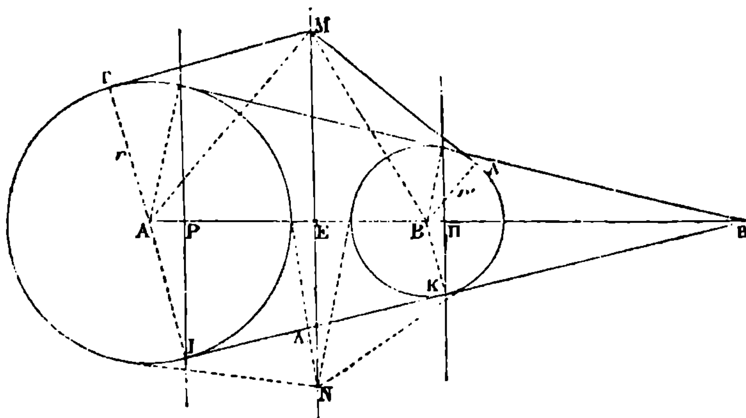
1398. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων ἐκ τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸ δύο δοθείσας περιφερείας (Α) καὶ (Β);

Ἔστω Μ σημεῖον ἐξ οὗ αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΓ, ΜΔ εἶναι ἴσαι. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΜΑΓ, ΜΒΔ, λαμβάνομεν:

$$MA^2 = M\Gamma^2 + \rho^2, \quad MB^2 = M\Delta^2 + \rho'^2$$

καὶ

$$MA^2 - MB^2 = \rho^2 - \rho'^2, \text{ σταθερὰ ποσότης.}$$



Σχ. 886.

Ὁ ζητούμενος τόπος ἑπομένως συμπίπτει πρὸς ἐκεῖνον *τῶν σημείων τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν σημείων* Α *καὶ* Β *ἔχει ὡρισμένην τιμὴν* $\rho^2 - \rho'^2$.

Ὁ τόπος οὗτος εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΑΒ εἰς σημεῖον Ε αὐτῆς, ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\rho^2 - \rho'^2 = AE^2 - EB^2 = (EA + EB)\,(EA - EB),$$

ἢ τῆς

$$EA - EB = \frac{\rho^2 - \rho'^2}{EA + EB}. \qquad (\S\S\ 71 \text{ καὶ } 1397)$$

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ εὐθεῖα ΜΕΝ εἶναι ὁ *ριζικὸς ἄξων* τῶν δύο περιφερειῶν (§§ 1264, 1265 καὶ ἰδίως 1265 α).

2) Ἡ εὐθεῖα αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Λ τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης τῶν περιφερειῶν ΙΚ. Ἀπέχει ἴσον, ἑπομένως, τῶν πολικῶν ΡΙ, ΠΚ τοῦ ἐξωτερικοῦ κέντρου ὁμοιότητος Σ πρὸς τὰς δύο περιφερείας. Ὁμοίως, ἴσον ἀπέχει τῶν πολικῶν τοῦ ἐσωτερικοῦ κέντρου ὁμοιότητος τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

3) Διὰ πᾶν σημεῖον Ν τοῦ ριζικοῦ ἄξονος, αἱ τέσσαρες ἐξ αὐτοῦ ἐφαπτόμεναι πρὸς τὰς περιφερείας εἶναι ἴσαι.

4) *Ὁ ριζικὸς ἄξων εἶναι ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ὀρθογωνίως τὰς δοθείσας περιφερείας*, ἐπειδὴ ἡ μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἄξονος τούτου καὶ ἀκτῖνα ΜΓ περιφέρεια τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας μὲ ἀκτῖνας ΑΓ καὶ ΒΔ.

Σημείωσις. Ὁ συγγραφεὺς τῶν *Problèmes de Géométrie et de Trigonométrie, avec la méthode à suivre pour la résolution des Problèmes de Géométrie, et les solutions*, Georges Ritt, ὀνομάζει τὸν *ριζικὸν ἄξονα* καὶ *δισομόλογον*, πρὸς ὑπόμνησιν τῆς ἰδιότητος αὐτοῦ νὰ εἶναι ὁμόλογος πρὸς ἑαυτόν. (Ὡς ἄνω, 9η ἔκδοσις, 1894, σ. 47).

Τόπος 438—I

1399. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἐξ αὐτῶν ἀγομένων ἐφαπτομένων πρὸς δύο περιφερείας εἶναι σταθερὰ ποσότης k^2;

Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ τόπου καὶ $ΜΓ^2 - ΜΔ^2 = k^2$. Θὰ ἔχωμεν (σχ. 886):

$$ΜΑ^2 - ρ^2 - (ΜΒ^2 - ρ'^2) = k^2$$

ἢ

$$ΜΑ^2 - ΜΒ^2 = k^2 + ρ^2 - ρ'^2 = σταθ.$$

Ὁ τόπος ἑπομένως τῶν σημείων Μ εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ (§ 71).

Τόπος 439

1400. Δίδεται σημεῖον Δ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν περιφερείας (Ο). Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Μ, δι' ἕκαστον τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τοῦ σημείου Δ εἶναι ἴση πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἐξ αὐτοῦ ἀγομένης πρὸς τὴν περιφέρειαν ἐφαπτομένης;

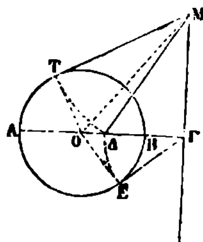
Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ τόπου καὶ ΜΔ = ΜΤ. Ἐὰν Γ εἶναι ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΟΔ, θὰ ἔχωμεν:

$$ΜΔ^2 = ΜΤ^2 = ΜΟ^2 - R^2$$

καὶ $$ΜΔ^2 - ΜΓ^2 = ΜΟ^2 - ΜΓ^2 - R^2$$

ἢ $$ΔΓ^2 = ΟΓ^2 - R^2.$$

Ἀλλ' εἶναι $ΟΓ^2 - R^2 = ΓΒ.ΓΑ$,



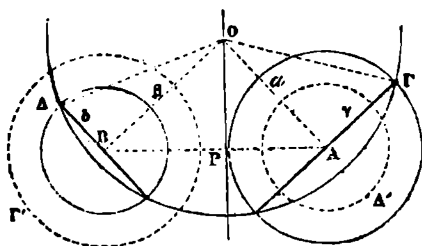
Σχ. 887.

καί, ἑπομένως, ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ κάθετος ΜΓ ἐπὶ τὴν ΟΔ, εἰς σημεῖον Γ αὐτῆς, τοιοῦτον, ὥστε

$$ΓΔ^2 = ΓΒ.ΓΑ.$$

Τόπος 440

1401. **Ποῖος ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, τῶν τεμνουσῶν δύο δοθείσας ἄλλας κατὰ διαμέτρους;** (N. A., 1846, σ. 532 καὶ Problèmes ὑπὸ Amiot et Desvignes, σ. 285, τ. VII).



Σχ. 888.

Ἔστωσαν $OA = \alpha$, $OB = \beta$, αἱ ἀποστάσεις τοῦ τυχόντος σημείου O τοῦ τόπου ἀπὸ τῶν κέντρων A καὶ B καὶ γ, δ αἱ ἀκτῖνες BΔ, AΓ. Ἐπειδή:

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \delta^2$$

ἢ $\gamma^2 - \delta^2 = \beta^2 - \alpha^2$

καὶ $\beta^2 - \alpha^2 = BP^2 - AP^2$, (§ 1397, α)

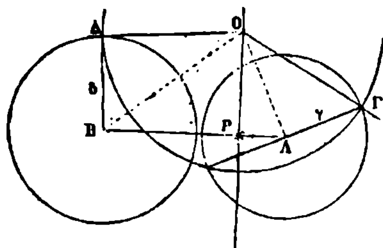
ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AB εἰς σημεῖον αὐτῆς P τοιοῦτον, ὥστε

$$BP^2 - AP^2 = \gamma^2 - \delta^2.$$

Παρατήρησις. Εἰς τὴν μεγαλυτέραν ἀκτῖνα γ ἀντιστοιχεῖ ἡ μικροτέρα ἀπόστασις AP· ὁ τόπος, ἑπομένως, εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν περιφερειῶν BΓ', AΔ', ἴσων πρὸς τὰς (A) καὶ (B) ἀντιστοίχως.

Τόπος 440—I

1402. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων O τῶν περιφερειῶν, τῶν τεμνουσῶν δοθεῖσαν περιφέρειαν (A) κατὰ διάμετρον καὶ ἄλλην (B) ὀρθογωνίως.**



Σχ. 889

Ἐπειδὴ $O\Gamma = O\Delta$, θὰ ἔχωμεν

$$OB^2 - \delta^2 = OA^2 + \gamma^2$$

ἢ $OB^2 - OA^2 = \delta^2 + \gamma^2 =$ σταθ.

Ὁ τόπος, συνεπῶς, εἶναι ἡ κάθετος OP ἐπὶ τὴν AB εἰς σημεῖον P αὐτῆς τοιοῦτον, ὥστε

$$PB^2 - PA^2 = \delta^2 + \gamma^2. \quad (1)$$

Ἡ κατασκευὴ τοῦ τόπου προϋποθέτει φυσικὰ τὴν γνῶσιν τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος:

Νὰ διαιρεθῇ εὐθεῖα AB εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων νὰ εἶναι δοθὲν τετράγωνον (§ 1429).

Εἰδικαὶ περιπτώσεις

1403. **Τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, τῶν διερχομένων διὰ σημείου B καὶ τεμνουσῶν περιφέρειαν (A) κατὰ διάμετρον.**

Εἶναι ἡ περίπτωσις τῆς § 1402, ἀλλ' ὅπου $\delta = 0$. Ὁ τόπος εἶναι πάλιν εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

1404. Τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, τῶν τεμνουσῶν ὀρθογωνίως περιφέρειαν (Β) καὶ διερχομένων διὰ σημείου Α.

Ἡ ἰδία περίπτωσις, ἀλλ' ὅπου $\gamma = 0$.

1404 α. Σημείωσις. Τὰ προηγούμενα θεωρήματα (§§ 1398, 1401 καὶ 1402) εὐκολύνουν τὴν λύσιν μεγάλου ἀριθμοῦ εἰδικῶν προβλημάτων. Διὰ τοῦ πρώτου, (§ 1398), ἀγόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν περιφερείας τεμνούσης ὀρθογωνίως τρεῖς ἄλλας δοθείσας καὶ διὰ τοῦ δευτέρου, εἰς τὴν κατασκευὴν περιφερείας τεμνούσης κατὰ διαμέτρους αὐτάς. (Βλ. ἐπμ. §§ 1478—1488).

Τόπος 440—ΙΙ

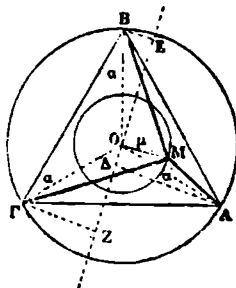
1404 β. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων διὰ τὰ ὁποῖα αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι αὐτὰ μετὰ τῶν κορυφῶν δοθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, ὁρίζουν, διὰ τῶν τομῶν των μετὰ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, ἓξ τμήματα ἐπ' αὐτῶν τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον τριῶν μὴ διαδοχικῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κύβον τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου;

Εἶναι ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον περιφέρεια. (*J. M. E.*, 1884, σ. 210 καὶ 211. — Ch. Derignу).

Τόπος 441

1405. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὰς κορυφὰς δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2;

Ἡ δυσκολωτέρα περίπτωσις εἶναι ἐκείνη τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου μὲ περιττὸν πλῆθος πλευρῶν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀπόδειξις παραμένει ἡ ἰδία, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ πλῆθος τοῦτο, ἂς περιορισθῶμεν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.



Σχ. 690.

Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ τόπου, α ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ μ ἡ ἀπόστασις ΟΜ. Ἔστωσαν δὲ Δ, Ε, Ζ αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ἐπὶ εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΜ.

Τὰ θεωρήματα, τὰ σχετικὰ πρὸς τὸ τετράγωνον πλευρᾶς κειμένης ἀπέναντι ὀξείας ἢ ἀμβλείας γωνίας τριγώνου, ἐφαρμοζόμενα εἰς τὰ τρίγωνα ΑΟΜ, ΒΟΜ, ΓΟΜ, δίδουν τὰς ἰσότητας:

$$AM^2 = \alpha^2 + \mu^2 - 2\mu \cdot A\Delta,$$

(ἐπειδὴ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν προβολὴν ἐπὶ τὴν μ τῆς ΟΑ.)

Ἀναλόγως: $MB^2 = \alpha^2 + \mu^2 + 2\mu \cdot BE,$

$$M\Gamma^2 = \alpha^2 + \mu^2 + 2\mu \cdot \Gamma Z.$$

Διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = k^2 = 3\alpha^2 + 3\mu^2 + 2\mu(BE + \Gamma Z - A\Delta).$$

Ἐπειδὴ δὲ διὰ τυχόντα ἄξονα ΔΕΖ (§ 750), ἀγόμενον διὰ τοῦ κέντρου τῶν μέσων ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπ' αὐτοῦ τῶν κορυφῶν τῶν εὑρισκομένων πρὸς τὸ ἓν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄλλων κορυφῶν, ἡ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ποσότης εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδὲν καὶ κατὰ συνέπειαν

$$k^2 = 3\alpha^2 + 3\mu^2 \quad \text{ἢ} \quad \mu^2 = \frac{k^2}{3} - \alpha^2, \text{ ποσότης σταθερά.}$$

Εἶναι δηλ. ὁ τόπος τῶν σημείων Μ ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα $\mu = \sqrt{\left(\frac{k^2}{3} - \alpha^2\right)}$.

Τόπος 441—I

1406. **Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν κορυφῶν τριγώνου εἶναι τετράγωνον δοθὲν k^2;**

Εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου καὶ ἀκτῖνα ὁριζομένην ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\mu^2 = \frac{k^2 - (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)}{3}.$$

ὅπου α', β', γ' τὰ $\frac{2}{3}$ ἑκάστης διαμέσου.

Θεώρημα. **Ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν κορυφῶν τυχόντος πολυγώνου εἶναι σταθερόν, εἶναι περιφέρεια, ἔχουσα ὡς κέντρον τὸ κέντρον τῶν μέσων ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου.**

(Βλ. Bobillier, *Cours de Géométrie,* II τμῆμα, § 4, 8η πρότασις).

Τόπος 441—II

1407. **Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν πλευρῶν δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι δοθὲν τετράγωνον k^2;**

Ἐπειδή, ὡς γνωστόν, αἱ προβολαὶ ἑνὸς σημείου ἐπὶ τὰς εὐθείας, τὰς διερχομένας διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ σχηματιζούσας διαδοχικὰς γωνίας ἴσας πρὸς τὰς γωνίας τῶν ἐκ τοῦ κέντρου κανονικοῦ πολυγώνου πρὸς τὰς κορυφὰς εὐθειῶν, εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ἐπίσης πολυγώνου ([88]), τὸ ἀνωτέρω ζήτημα ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὸ προηγούμενον τῆς § 1405.

Ἐργαζόμενοι (διὰ τὴν ἁπλότητα τοῦ σχήματος) ἐπὶ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ θεωροῦντες τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΛΠΚ,

---

88. Σημ. μετ. Ἔστωσαν, πράγματι, ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ τρεῖς τοιαῦται εὐθεῖαι (διὰ τὴν περίπτωσιν ἰσοπλεύρου τριγώνου) καὶ Ο τυχὸν σημεῖον (Σχ. 891). Αἱ προβολαὶ Λ, Π, Κ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τὰς εὐθείας κεῖνται προφανῶς ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΟΜ, τὰ δὲ τόξα ΚΟΛ, ΛΜΠ, ΠΡΚ εἶναι ἴσα κλπ.

τῶν προβολῶν τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὰς τρεῖς εὐθείας ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ, εὐκόλως εὑρίσκομεν τὰς σχέσεις:

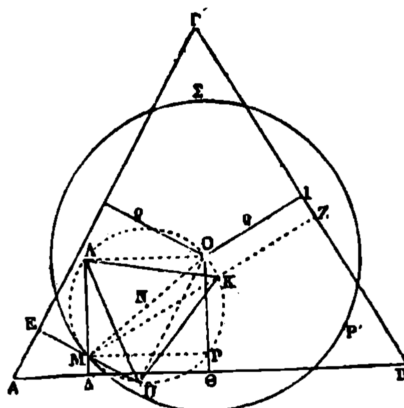
$$\text{ΜΔ} = \text{ΡΘ} = \text{ΟΘ} - \text{ΟΡ} = \rho - \text{ΜΛ}, \text{ ἐξ ἧς } \text{ΜΔ}^2 = \rho^2 - 2\rho\,\text{ΜΛ} + \text{ΜΛ}^2$$

$$\text{ΜΕ} = \rho - \text{ΜΠ} \qquad » \qquad \text{ΜΕ}^2 = \rho^2 - 2\rho\,\text{ΜΠ} + \text{ΜΠ}^2$$

$$\text{ΜΖ} = \rho + \text{ΜΚ} \qquad » \qquad \text{ΜΖ}^2 = \rho^2 + 2\rho\,\text{ΜΚ} + \text{ΜΚ}^2$$

Ἑπομένως,

$$\text{ΜΔ}^2 + \text{ΜΕ}^2 + \text{ΜΖ}^2 = k^2 = 3\rho^2 + (\text{ΜΛ}^2 + \text{ΜΠ}^2 + \text{ΜΚ}^2) + $$
$$+ 2\rho\,(\text{ΜΚ} - \text{ΜΛ} - \text{ΜΠ}).$$



Σχ. 801.

Τῆς ἰσότητος ταύτης ὁ ὅρος $2\rho\,(\text{ΜΚ} - \text{ΜΛ} - \text{ΜΠ})$ εἶναι μηδὲν (§§ 1405 καὶ 750), ὁ δὲ ὅρος $(\text{ΜΛ}^2 + \text{ΜΠ}^2 + \text{ΜΚ}^2)$ εἶναι ἴσος πρὸς $3\,\text{ΜΝ}^2 + 3\,\text{ΜΝ}^2 = 6\,\text{ΜΝ}^2 = \frac{3}{2}\,\text{ΜΟ}^2$.

Ἑπομένως

$$\text{ΜΔ}^2 + \text{ΜΕ}^2 + \text{ΜΖ}^2 = 3\rho^2 + \frac{3\,\text{ΟΜ}^2}{2} = k^2, \text{ ἐξ ἧς}$$

$$(\text{ΟΜ})^2 = \frac{2k^2}{3} - 2\rho^2, \text{ ποσότης σταθερά.}$$

Εἶναι δηλ. ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ περιφέρεια (Π) ὁμόκεντρος τῆς ΑΒΓ.

1407 α. *Εἰδικαὶ περιπτώσεις.* 1) Ἡ περιφέρεια (Π) περιορίζεται εἰς τὸ κέντρον Ο διὰ $\text{ΟΜ} = 0$, δηλ. διὰ $k^2 = 3\rho^2$, ὡς εὐκόλως ἐπαληθεύεται.

2) Ἡ περιφέρεια (Π) συμπίπτει πρὸς τὴν περιγεγραμμένην εἰς τὸ ΑΒΓ ὅταν $\text{ΟΜ} = 2\rho$, δηλ. διὰ

$$k^2 = 9\rho^2.$$

Τοῦτο ἐπαληθεύεται πάλιν εὐκόλως· ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῆς τυχούσης κορυφῆς Α τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ τῶν πλευρῶν του εἶναι

$$k^2 = \upsilon_a{}^2 = (3\rho)^2 = 9\rho^2.$$

Τόπος 441—III

1407 β. **Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τετραγώνου ἔχει σταθερὰν τιμήν;**

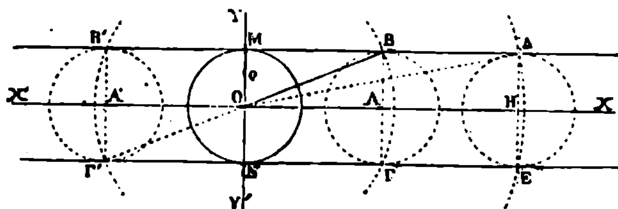
Εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ κέντρον Ο τοῦ τετραγώνου.

Ἐὰν 2α εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου καὶ δ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν λόγῳ κύβων εἶναι $2\alpha(2\alpha^2 + 3\delta^2)$. Βλ. § 1773κ, σημ., καὶ Ν. Α., 1910, σ. 424, n° 2130, Barisien.

Τόπος 442

1407 γ. **Εὐθείας ἀπεριορίστου ΧΧ' τὰ σημεῖα αὐτῆς Α θεωροῦμεν κέντρα περιφερειῶν σταθερᾶς ἀκτῖνος ρ, ἔστω δὲ (Ο) περιφέρεια μεταβλητῆς ἀκτῖνος, ἔχουσα κέντρον σταθερὸν σημεῖον Ο τῆς εὐθείας ταύτης. Ποῖος ὁ τόπος τῶν τομῶν Β, Γ τῶν περιφερειῶν (Ο) μεθ' ἑκάστης τῶν περιφερειῶν (Α) ἐὰν αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν (Ο) εἶναι, ἑκάστοτε, ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς τὰ μήκη ρ καὶ ΟΑ;**

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ τόπος περιέχει τὸ ζεῦγος τῶν παραλλή-



Σχ. 802.

λων πρὸς τὴν ΧΧ' εὐθειῶν ΒΒ', ΓΓ'. Εἰς τοῦτον ὅμως ἀνήκει καὶ ἡ περιφέρεια (ΜΝ) μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ρ. Ἐπειδή, διὰ $A \equiv O$, ἡ περιφέρεια (Α) συμπίπτει πρὸς τὴν περιφέρειαν (ΜΝ), ἡ δὲ περιφέρεια (Ο) θὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τότε $\sqrt{OA^2 + \rho^2} = \rho$, ἀφοῦ $OA = 0$, καὶ θὰ συμπίπτῃ καὶ αὕτη, ἑπομένως, πρὸς τὴν περιφέρειαν (ΜΝ). Κατὰ συνέπειαν, τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν περιφερειῶν (Α) καὶ (Ο) εἰς τὴν θέσιν τῆς κινητῆς περιφερείας $A = O$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς περιφερείας (ΜΝ), ἀφοῦ ἀμφότεραι αἱ περιφέρειαι αὗται συμπίπτουν πρὸς τὴν περιφέρειαν (ΜΝ).

1407 δ. Σημείωσις. 1) Ἐπὶ ἑκάστης περιφερείας (Ο) ὁρίζονται τέσσαρα σημεῖα τοῦ ζητουμένου τόπου, τὰ Β, Γ καὶ Β', Γ'. Ὁ πλήρης τόπος εἶναι ἐν γένει τετάρτου βαθμοῦ καμπύλη.

2) Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΧΧ' δὲν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο, ἡ ἐξίσωσις τετάρτου βαθμοῦ (εἰς ἣν ὁδηγεῖ ὁ διὰ τῆς Α. Ν. Γεωμε-

τρίας χειρισμός τοῦ προβλήματος) δὲν δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄλλας κατωτέρου βαθμοῦ. Ἡ εὐθεῖα ΥΥ' εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς καμπύλης ἣν παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις αὕτη.

3) Ὁ ἀνωτέρω σύνθετος τόπος εἶναι ἡ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς τομῆς ἑνὸς μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς καὶ τοῦ κυλίνδρου μὲ ὁδηγὸν τὴν περιφέρειαν - λαιμὸν τοῦ ὑπερβολοειδοῦς καὶ γενετείρας παραλλήλους πρὸς δύο παραλλήλους γενετείρας τοῦ ὑπερβολοειδοῦς.

4) Αἱ προβολαὶ (ἐπὶ κατάλληλα ἐπίπεδα) τῶν καμπύλων καθ' ἃς τέμνονται δύο ἐπιφάνειαι δευτέρου βαθμοῦ δύνανται, εἰς ὡρισμένας εἰδικὰς περιπτώσεις, νὰ θεωρηθοῦν ὡς παραδείγματα τόπων τοῦ, ὡς ἀνωτέρω, συνθέτου τύπου.

5) Ὁ τόπος ὅστις ἐσπουδάσθη εἰς τὰς *Μεθόδους* (§ 85 α) εἶναι καμπύλη τρίτου βαθμοῦ. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δὲν εἶναι ἰσοσκελές, ὁ τόπος εἶναι συνεχὴς καμπύλη (ἀποτελεῖται δηλ. ἐξ ἑνὸς κλάδου).

6) Ὁ τόπος τῆς § 1361 *ὅταν τὰ τμήματα* ΟΜ, ΟΝ *δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς καὶ ἔχουν κοινὸν σημεῖον* Ο, εἶναι ἐπίσης καμπύλη τρίτου βαθμοῦ: *πλαγία στροφοειδής*, ἔχουσα διπλοῦν σημεῖον τὸ Ο (*J. M. S.*, 1895, σ. 98). Ἐὰν ΟΜ = ΟΝ, ὁ τόπος ἀναλύεται εἰς τὴν *διχοτόμον* τῆς γωνίας ΜΟΝ — ἐκ τῶν σημείων τῆς ὁποίας τὰ τμήματα ταῦτα φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας — καὶ εἰς τὴν *περιγεγραμμένην περιφέρειαν* εἰς τὸ τρίγωνον ΜΟΝ, ἐκ τῶν σημείων τῆς ὁποίας τὰ τμήματα φαίνονται ὑπὸ συμπληρωματικὰς γωνίας. (N. A., 1850, σ. 249, n° 2) καὶ ἐπμ. § 2166 α).

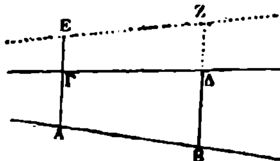
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Εὐθεῖαι ἀνάλογοι

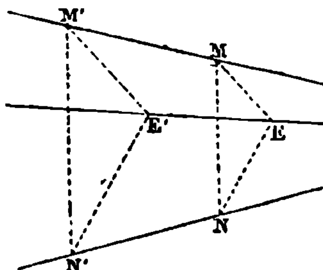
Πρόβλημα 443

1408. **Διὰ δοθέντος σημείου Ε νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΕΖ, διερχομένη διὰ τοῦ σημείου τομῆς δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, τεμνομένων ἐκτὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως.**

1η Κατασκευή. Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ θὰ διέρ-



Σχ. 893.



Σχ. 894.

χωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, θὰ τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα ὑπὸ ζεύγους τυχουσῶν παραλλήλων ΑΕ, ΒΖ, τεμνουσῶν αὐτάς.

Φέρομεν, ἑπομένως, διὰ τοῦ σημείου Ε τυχοῦσαν τέμνουσαν ΕΑ καὶ ἄλλην, παράλληλον πρὸς αὐτὴν ΒΖ, καὶ κατασκευάζομεν τὸν τέταρτον ὅρον τῆς ἀναλογίας $\frac{ΑΓ}{ΓΕ} = \frac{ΒΔ}{ΔΖ \text{ ἢ } x}$.

Τὸ μῆκος ΔΖ καθορίζει τὴν θέσιν τοῦ σημείου Ζ καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ζητουμένης εὐθείας. (Σχ. 893).

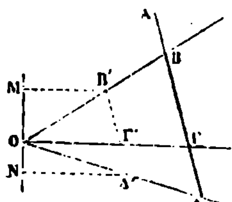
2α Κατασκευή. Ἡ θεώρησις *βοηθητικῶν στερεῶν* ὁδηγεῖ εἰς μίαν πολὺ ταχεῖαν κατασκευὴν (Σχ. 894):

Φέρομεν ζεῦγος παραλλήλων ΜΝ, Μ'Ν', τεμνουσῶν τὰς δοθείσας εὐθείας καὶ συνδέομεν τὸ σημεῖον Ε μετὰ τῶν σημείων Μ καὶ Ν. Διὰ τοῦ Μ' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΜΕ, διὰ τοῦ Ν' παράλληλον πρὸς τὴν ΝΕ καὶ συνδέομεν τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Ε' μετὰ τοῦ Ε. Ἡ εὐθεῖα ΕΕ' εἶναι ἡ ζητουμένη.

Πρόβλημα 443—I

1409. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο καὶ σημεῖον Α. Διὰ τοῦ σημείου τούτου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτὰς εἰς Β, Γ, Δ εἰς τρόπον ὥστε $\frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{μ}{ν}$, λόγος δοθείς.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον. Ἐπειδὴ διὰ τυχοῦσαν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓΔ τέμνουσαν Β'Γ'Δ' τῶν εὐθειῶν, ὁ λόγος $\frac{Β'Γ'}{Γ'Δ'}$ θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσος πρὸς $\frac{μ}{ν}$, ἀγόμεθα εὐκόλως εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν.



Σχ. 895.

Διὰ τοῦ σημείου Ο φέρομεν εὐθεῖαν τυχοῦσαν καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν δύο τμήματα ΟΜ, ΟΝ κατὰ λόγον $\frac{μ}{ν}$. Ἐκ τῶν Μ, Ν φέρομεν ζεῦγος παραλλήλων ΜΒ', ΝΔ' πρὸς τὴν ΟΓ. Ἡ ἐκ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν Β'Δ' εὐθεῖαν εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Πρόβλημα 443—II

1410. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ἔχουσα λόγον πρὸς ἄλλην δοθεῖσαν ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων τετραγώνων.

(*Μέθοδοι*, § 294, θ).

Πρόβλημα 443—III

1410 α. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι ἔχουσαι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων κύβων.

Δυνάμεθα νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς ἀποδειχθὲν ἤδη θεώρημα (§ 1168)· ἀλλ' ἕνεκα τοῦ ἐνδιαφέροντος τοῦ προβλήματος τούτου, θὰ δώσωμεν μίαν πλήρη λύσιν αὐτοῦ, ἀνεξάρτητον τῆς προμνησθείσης προτάσεως.

Ἔστωσαν μ, ν αἱ πλευραὶ τῶν δοθέντων κύβων. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ὀρθογώνιον ΑΒΓ, ἔχον ὡς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας τὰ μήκη μ, ν καὶ φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτεί-

νουσαν καὶ τὰς ΔΕ, ΔΖ καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ, ἀντιστοίχως. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΒΕ}{ΓΖ} = \frac{μ^3}{ν^3}.$$

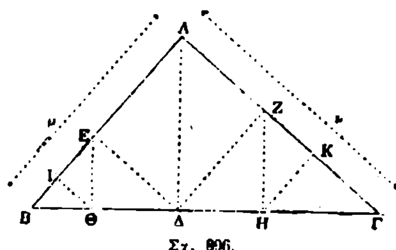
Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, πράγματι, τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ, λαμβάνομεν τὰς ἰσότητας:

$$ΒΕ = \frac{ΒΔ^2}{ΑΒ}$$

ἢ $$ΒΕ = \frac{ΒΔ^2}{μ},$$

$$ΓΖ = \frac{ΓΔ^2}{ΑΓ}$$

ἢ $$ΓΖ = \frac{ΓΔ^2}{ν},$$



Σχ. 896.

ἐκ τῶν ὁποίων,

$$\frac{ΒΕ}{ΓΖ} = \frac{ΒΔ^2}{ΓΔ^2} \cdot \frac{ν}{μ}.$$

Ἐπειδὴ δὲ

$$\frac{ΒΔ^2}{ΓΔ^2} = \frac{ΑΒ^4}{ΑΓ^4} = \frac{μ^4}{ν^4},$$

ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται

$$\frac{ΒΕ}{ΓΖ} = \frac{μ^4}{ν^4} \cdot \frac{ν}{μ} = \frac{μ^3}{ν^3}.$$

1410 β. Παρατήρησις. Φέροντες τὰς καθέτους ΕΘ, ΖΗ, ΘΙ, ΗΚ, εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$\frac{ΒΘ}{ΓΗ} = \frac{μ^4}{ν^4}, \quad \frac{ΒΙ}{ΓΚ} = \frac{μ^5}{ν^5}, \quad κλπ.$$

Πρόβλημα 443—IV

1411. Δίδονται δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον Ο. Διὰ τοῦ σημείου Ο νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τῶν εὐθειῶν ΟΜΝ (Σχ. 49), εἰς τρόπον, ὥστε $\frac{ΟΜ}{ΟΝ} = \frac{μ}{ν}$, λόγος δοθείς.

(*Μέθοδοι*, § 94).

Πρόβλημα 444

1412. Δίδονται σημεῖον Ο, εὐθεῖα καὶ περιφέρεια. Διὰ τοῦ σημείου Ο νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΜΟΝ τῶν δύο γραμμῶν (Σχ. 50), τοιαύτη, ὥστε $\frac{ΟΜ}{ΟΝ} = \frac{μ}{ν}$, λόγος δοθείς.

(*Μέθοδοι*, § 95).

Πρόβλημα 444—I

1413. Τὸ ἴδιον πρόβλημα, ἀλλ' ὅπου αἱ εὐθεῖαι ἀντικατεστάθησαν ὑπὸ περιφερειῶν.

(*Μέθοδοι*, § 96).

Πρόβλημα 445

1414. Δίδονται δύο τεμνόμεναι περιφέρειαι. Διά τοῦ ἑνὸς τῶν κοινῶν αὐτῶν σημείων νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τῶν περιφερειῶν, διαιρουμένη ὑπ' αὐτοῦ εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον δοθέντα.

Εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ προηγουμένου προβλήματος. Ἁπλουστάτη καὶ ἄμεσος λύσις εἶναι ἡ εἰς τὰς *Μεθόδους*, § 138, εὑρισκομένη.

Πρόβλημα 445—I

1415. Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓ δοθείσης περιφερείας (Ο), τοιαύτη, ὥστε τὰ τμήματα ΑΒ, ΑΓ τῆς τεμνούσης νὰ εὑρίσκωνται εἰς δοθέντα λόγον, $\frac{2}{5}$ λόγου χάριν.

Τοῦ προβλήματος τούτου ἐπελήφθημεν ἤδη κατὰ γενικὸν τρόπον εἰς τὰς *Μεθόδους*, § 96. Ἰδοὺ καὶ μία ἰδιαιτέρα λύσις.

Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΔ. Θὰ ἔχωμεν, διὰ πᾶσαν τέμνουσαν:

$$ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ^2.$$

Ἐὰν δὲ εἶναι πρὸς τούτοις καὶ

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{2}{5},$$

Σχ. 891.

διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων, εὑρίσκομεν

$$ΑΒ^2 = \frac{2}{5} ΑΔ^2.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης σχέσεως συνάγομεν τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν:

Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΑΔ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ΑΔ, γράφομεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν μὲ διάμετρον ΑΔ καὶ ὑψοῦμεν κάθετον ΕΖ ἐπὶ τὴν διάμετρον μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἡ τομὴ τῆς περιφερείας (Α, ΑΖ) μετὰ τῆς δοθείσης ὁρίζει τὴν ζητουμένην τέμνουσαν ΑΒΓ.

Πράγματι, $ΑΒ^2 = ΑΖ^2$, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς χορδῆς ΑΖ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΑΔ, ὃν καὶ ἡ προβολὴ ΑΕ τῆς χορδῆς αὐτῆς πρὸς ὁλόκληρον τὴν διάμετρον. Ἐπομένως

$$ΑΒ^2 = \frac{2}{5} ΑΔ^2$$

καὶ διὰ διαιρέσεως τῆς σχέσεως αὐτῆς διὰ τῆς γνωστῆς

$$ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ^2,$$

εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{2}{5}.$$

Παρατηρήσεις. 1) Δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος παρέχει ἡ τέμνουσα ΑΒ'Γ', ἴση πρὸς τὴν πρώτην.
2) Ἡ διὰ τῆς χρήσεως τῶν *γεωμετρικῶν τόπων* λύσις εἶναι κατὰ πολὺ ἁπλουστέρα, ἀπὸ ἀπόψεως ἀποδείξεως καὶ κατασκευῆς.

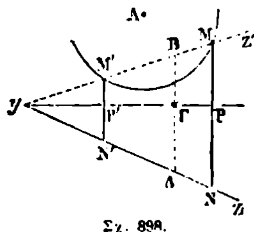
Πρόβλημα 445—II

1416. Δίδονται γωνία ΡγΖ καὶ περιφέρεια. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΜΡΝ κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν, Ργ, τῆς γωνίας καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς Ργ, νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῆς Ργ καὶ ζγ.

Φέρομεν τυχοῦσαν κάθετον ΔΓΒ ἐπὶ τὴν Ργ καὶ ἐπὶ ταύτης λαμβάνομεν

$$ΒΓ = \frac{1}{2} ΓΔ.$$

Ἡ εὐθεῖα γΜ'ΒΜ καθορίζει τὰς δύο ἐν γένει λύσεις τοῦ προβλήματος. Ἐπειδή:



Σχ. 898.

$$ΜΡ = \frac{1}{2} ΡΝ, \quad Μ'Ρ' = \frac{1}{2} Ρ'Ν'.$$

Πρόβλημα 445—III

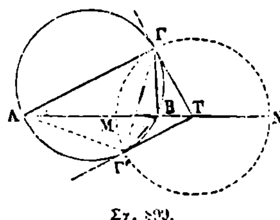
1417. Ζητήματα ἀνάλογα. Ὁ λόγος $\frac{ΜΡ}{ΡΝ} = \frac{\mu}{\nu}$ τυχὼν καὶ ἡ ΜΝ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

Πρόβλημα 446

1418. Δίδονται περιφέρεια καὶ χορδὴ αὐτῆς ΑΒ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Γ διὰ τὸ ὁποῖον αἱ ἀποστάσεις ΓΑ, ΓΒ νὰ ἔχουν λόγον δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$.

1α Λύσις. Μέθοδοι, § 42.

2η Λύσις. Χρῆσις τῶν γεωμ. τόπων. Προσδιορίζομεν δύο συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα Μ, Ν τῶν Α καὶ Β, εἰς τρόπον, ὥστε



Σχ. 899.

$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{ΝΑ}{ΝΒ} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΜΝ τέμνει τὴν δοθεῖσαν κατὰ σημεῖα Γ καὶ Γ', ἀπαντῶντα εἰς τὸ πρόβλημα.

3η Λύσις. (Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie*, τόμος II, σ. 280).

Ἔστω $\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ ΓΤ ἡ ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφε-

ρείας εἰς τὸ Γ. Τὰ τρίγωνα ΑΓΤ καὶ ΤΓΒ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν εἰς Τ κοινὴν καὶ τὴν γων. ΒΓΤ = ΒΑΓ. Ἄρα

$$\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{ΓΤ}{ΒΤ}, \quad \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{ΑΤ}{ΓΤ}.$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων, ἀπαλοιφῆς τοῦ κοινοῦ ὅρου ΓΤ καὶ ἀντικαταστάσεων τοῦ λόγου $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ διὰ τοῦ $\frac{\mu}{\nu}$, εὑρίσκομεν διαδοχικῶς

$$\frac{ΑΤ}{ΒΤ} = \frac{\mu^2}{\nu^2}, \quad \frac{ΑΤ - ΒΤ}{ΒΤ} = \frac{ΑΒ}{ΒΤ} = \frac{\mu^2 - \nu^2}{\nu^2}.$$

Τὸ τμῆμα ΒΤ κατασκευάζεται εὐκόλως, ὡς ἔχον λόγον πρὸς γνωστὸν ἄλλο τμῆμα ΑΒ, ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων τετραγώνων. Ἐξ αὐτοῦ ὁρίζονται τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ'.

Πρόβλημα 446—I

1419. Ἐπὶ διαμέτρου ΑΒ δοθείσης περιφερείας δίδεται σημεῖον Α. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης σημεῖον Γ, τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν Α καὶ Β νὰ εἶναι δοθεὶς $\frac{\mu}{\nu}$. Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα.

Ὁρίζομεν κατὰ πρῶτον τὴν περιφέρειαν - τόπον τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν Α καὶ Β νὰ ἔχουν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$. Αὕτη εἶναι ἡ ἔχουσα διάμετρον ΜΝ, ὅπου Μ καὶ Ν τὰ συζυγῆ τῶν Α καὶ Β σημεῖα κλπ.

Τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῆς δοθείσης εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα Γ. Ἐπειδὴ θὰ εἶναι

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Διερεύνησις. α) Ἡ χρῆσις τοῦ ὡς ἄνω γεωμετρικοῦ τόπου εἶναι φανερὸν ὅτι λύει τὸ πρόβλημα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ δοθεῖσα περιφέρεια εἶναι τυχοῦσα καμπύλη.

β) Ὡς εἴδομεν ὑπάρχουν δύο λύσεις τοῦ προβλήματος, αἱ Γ καὶ Γ', συμμετρικαὶ πρὸς τὴν ΗΜΝ εὐθεῖαν.

γ) Ἐὰν $\mu > \nu$, ὑπάρχουν πάντοτε δύο λύσεις, ἀφοῦ τὸ σημεῖον Μ θὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ τὸ Ν ἐκτὸς τῆς περιφερείας.

δ) Ἐὰν $\mu < \nu$, ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu} < 1$ δὲν πρέπει νὰ κατέλθῃ κάτω μιᾶς ὡρισμένης *ἐλαχίστης τιμῆς*· ἐπειδὴ ἡ διάμετρος ΜΝ δὲν πρέπει νὰ εἶναι ἐσωτερικὸν τμῆμα τῆς ΗΒ.

Ἡ ἐλαχίστη αὕτη τιμὴ εἶναι ὁ λόγος $\frac{ΗΑ}{ΗΒ}$ καὶ ἡ ἀντίστοιχος

περιφέρεια (ΜΝ) ή (έστιγμένη) ΗΛΘ. Τά σημεῖα Γ, Γ' συμπίπτουν τότε πρός τό σημεῖον Η.

ε) Τά σημεῖα Α, Β δύνανται νά ἔχουν, γενικώτερον, *τυχοῦσαν θέσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς δοθείσης περιφερείας*. Τό πρόβλημα τότε θά ἔχῃ δύο, μίαν ἤ καμμίαν λύσιν, ἐάν ή περιφέρεια $\left(A, B, \frac{\mu}{\nu}\right)$ τέμνῃ, ἐφάπτεται ἤ δέν ἔχῃ κοινά σημεῖα μετά τῆς δοθείσης (ΗΒ).

Πρόβλημα 447

1420. **Δοθέντος τριγώνου, νά ἀχθῇ εἰς τό ἐπίπεδον αὐτοῦ εὐθεῖα, τοιαύτη, ὥστε αἱ ἀποστάσεις ἀπ' αὐτῆς τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου νά εἶναι ἀνάλογοι δοθέντων μηκῶν λ, μ καί ν.** (Guilmin).

1η Λύσις. Ὑποθέσωμεν ὅτι :

$$\frac{ΑΛ}{\lambda}=\frac{ΒΜ}{\mu}=\frac{ΓΝ}{\nu}.$$

Τά ὅμοια τρίγωνα ΔΑΛ, ΔΒΜ δίδουν τήν ἀναλογίαν

$$\frac{ΔΒ}{ΔΑ}=\frac{ΒΜ}{ΑΛ}=\frac{\mu}{\lambda},$$

ἐξ ἧς

$$\frac{ΔΒ-ΔΑ}{ΔΑ}=\frac{ΑΒ}{ΔΑ}=\frac{\mu-\lambda}{\lambda}$$

ή

$$ΔΑ=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\,ΑΒ$$

Σχ. 901

Ὁμοίως, ἐκ τῶν τριγώνων ΕΝΓ, ΕΜΒ,

$$\frac{ΕΒ}{ΕΓ}=\frac{ΒΜ}{ΓΝ}=\frac{\mu}{\nu},\quad \frac{ΕΒ-ΕΓ}{ΕΓ}=\frac{ΓΒ}{ΕΓ}=\frac{\mu-\nu}{\nu}$$

καί

$$ΕΓ=\frac{\nu}{\mu-\nu}\,.\,ΒΓ.$$

Δυνάμεθα, ἑπομένως, νά κατασκευάσωμεν τά μήκη ΔΑ καί ΕΓ καί νά ὁρίσωμεν τήν ζητουμένην εὐθεῖαν ΔΕ.

Παρατήρησις. Ἐάν ή ζητουμένη εὐθεῖα πρέπει νά τέμνῃ τό τρίγωνον, ὡς ή Δ'Ν', ἀναλόγως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν :

$$\frac{Δ'Β}{Δ'Α}=\frac{ΒΜ'}{ΑΛ'},\quad \frac{Δ'Β+Δ'Α}{Δ'Α}=\frac{ΑΒ}{Δ'Α}=\frac{\lambda+\mu}{\lambda},\quad ΑΔ'=ΛΒ.\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Ἐπίσης, $$ΓΕ'=ΓΒ\,.\,\frac{\nu}{\mu+\nu}\ \text{κλπ.}$$

Τό πρόβλημα λύεται καί κατά γενικώτερον τρόπον ὡς ἑξῆς :

1420α. *2α Λύσις.* Μέ κέντρα Α, Β καί ἀκτῖνας ἀναλόγους, ἀντιστοίχως, τῶν λ καί μ, γράφομεν περιφερείας, τῶν ὁποίων ἔστω Λ τό ἐξωτερικόν κέντρον ὁμοιότητος καί Λ' τό ἐσωτερικόν. Ὡς γνωστόν (§ 1257), ἀπό πάσης εὐθείας, ἀγομένης διά τῶν Λ ἤ Λ', αἱ ἀποστάσεις τῶν Α καί Β θά εὑρίσκωνται κατά λόγον $\frac{\lambda}{\mu}$, *ὁ δὲ*

ὁρισμὸς τῶν συζυγῶν, πρὸς τὰ Α *καὶ* Β *σημείων* Λ, Λ′ *ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ λόγου* $\frac{\lambda}{\mu}$.

Ἀναλόγως ἐργαζόμενοι διὰ τὰ σημεῖα Β, Γ καὶ Γ, Α, ὁρίζομεν τὰ συζυγῆ αὐτῶν Μ, Μ′ καὶ Ν, Ν′ ἀναφορικῶς πρὸς τοὺς δοθέντας λόγους $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\nu}{\lambda}$, ἀντιστοίχως.

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ *D'Alembert* (§ 1260), τὰ ἓξ ταῦτα κέντρα ὁμοιότητος ὁρίζουν τέσσαρας εὐθείας ΛΜΝ, ΛΜ′Ν′, Λ′ΜΝ′, Λ′Μ′Ν, *ἑκάστη δὲ τούτων ἀπαντᾷ εἰς τὸ πρόβλημα* τῆς § 1420.

Ὑπάρχουν, ἑπομένως, τέσσαρες, ἐν γένει, λύσεις αὐτοῦ καὶ ἐξ αὐτῶν μόνον ἡ ΛΜΝ εἶναι ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα παρελήφθη ἐκ τῶν *Exercices de Géométrie* τοῦ Guilmin (Βιβλίον ΙΙΙ, n° 82).

Πρόβλημα 448

1421. Δίδονται περιφέρεια, δύο σημεῖα Α, Β ἐπ' αὐτῆς καὶ σταθερὰ χορδὴ ΕΖ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Γ, τοιοῦτον, ὥστε αἱ χορδαὶ ΓΑ, ΓΒ νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς ΕΖ καὶ ἀπὸ τοῦ μέσου της Ο τμήματα ΟΜ, ΟΝ ἔχοντα λόγον δοθέντα.

(*Μέθοδοι*, § 275).

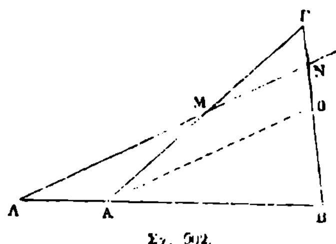
Πρόβλημα 449

1422. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν διευθύνσεις κατάλληλοι (ε) καὶ (η), τοιαῦται, ὥστε αἱ, ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τῆς βάσεώς του ΒΓ, ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς αὐτὰς καὶ περατούμεναι εἰς τὰς πλευράς, νὰ ἔχουν ἄθροισμα ΟΜ + ΟΝ = λ, δοθὲν μῆκος.

(*Μέθοδοι*, § 44).

Πρόβλημα 450

1423. Ἐκ σημείου Λ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΛΜΝ, ὁρίζουσα ἐπὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου τμήματα ΑΜ, ΒΝ ἴσα.



Σχ. 502.

Τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου δίδει τὴν ἰσότητα

$$\frac{ΑΜ}{ΓΜ}\cdot\frac{ΓΝ}{ΒΝ}\cdot\frac{ΒΛ}{ΑΛ}=1.$$

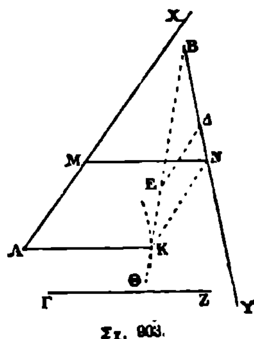
Ἐπειδὴ ΑΜ = ΒΝ, ἡ σχέσις αὕτη γράφεται καὶ

$$\frac{ΓΝ}{ΓΜ}=\frac{ΑΛ}{ΒΛ}.$$

Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{ΑΛ}{ΒΛ}$ εἶναι ὡρισμένος, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς ΓΒ σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε $\frac{ΓΟ}{ΓΑ}=\frac{ΑΛ}{ΒΛ}$ καὶ νὰ φέρωμεν διὰ τοῦ Λ τὴν παράλληλον πρὸς ΑΟ εὐθεῖαν ΛΜΝ.

Πρόβλημα 450—I

1423. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ΑΧ, ΒΥ. Ν' ἀχθῇ τρίτη ΜΝ, τοιαύτη, ὥστε $\frac{AM}{BN} = \frac{\mu}{\nu}$ (Σχ. 903) καὶ 1) ἡ διεύθυνσίς της νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν ΓΖ, ἢ 2) τὸ τμῆμα αὐτῆς ΜΝ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν μῆκος λ.



Σχ. 903.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΜΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΖ ἢ ΜΝ = λ καὶ $\frac{AM}{BN} = \frac{\mu}{\nu}$. Φέροντες τὰς παραλλήλους ΝΚ πρὸς τὴν ΑΜ καὶ ΑΚ πρὸς τὴν ΜΝ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου Κ.

Πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν μῆκος ΒΔ τυχόν, διὰ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΧ καὶ ἐπὶ ταύτης ὁρίζομεν μῆκος ΔΕ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\Delta E}{B\Delta} = \frac{\mu}{\nu}$. Ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΕΘ καὶ

1) Διὰ τοῦ Α ἀγάγωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν ΓΖ, ἡ τομὴ αὐτῆς μετὰ τῆς ΒΘ καθορίζει τὸ σημεῖον Κ. Ἡ ἐκ τοῦ Κ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΔ τέμνει τὴν ΒΥ εἰς τὸ σημεῖον Ν, ἐξ οὗ ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΖ ὁρίζει τὴν εὐθεῖαν ΝΜ κατὰ τὸ πρῶτον συμπληρωματικὸν ἐπίταγμα.

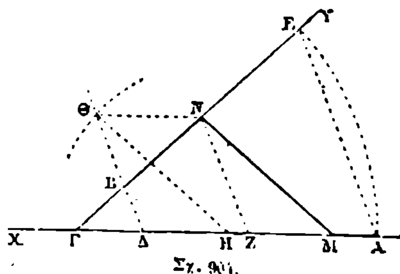
2) Μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα λ γράφωμεν περιφέρειαν· ἡ τομὴ αὐτῆς μετὰ τῆς ΒΘ καθορίζει πάλιν τὸ σημεῖον Κ, ἄρα καὶ τὴν ΜΝ, κατὰ τὴν ἰδίαν κατασκευήν, πληροῦσαν τὸ δεύτερον ἐπίταγμα.

1423β. Παρατηρήσεις. 1) Ὑποτίθεται ὅτι αἱ φοραὶ τῶν τμημάτων ΑΜ, ΒΝ ἐπὶ τῶν ΑΧ καὶ ΒΥ εἶναι δοθεῖσαι. Ἄλλως, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ πρόβλημα 1) θὰ ἔχῃ τέσσαρας λύσεις.

2) Ἐὰν ὁρισθοῦν αἱ φοραὶ αὗται, τὸ πρόβλημα 2) ἐπιδέχεται δύο, ἐν γένει, λύσεις. Μίαν μόνην, ἐὰν ἡ περιφέρεια (Α, λ) ἐφάπτεται τῆς ΒΘ καὶ καμμίαν, ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΒΘ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ μήκους λ.

Πρόβλημα 450—II

1423γ. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ΑΧ, ΒΥ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τρίτη, τέμνουσα αὐτὰς εἰς Μ καὶ Ν καὶ τοιαύτη, ὥστε ΜΝ = λ καὶ ΑΜ + ΒΝ = δ, ὅπου λ, δ δοθέντα μήκη.



Σχ. 904.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον, ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν :

Λαμβάνομεν ΓΕ = ΓΑ, ΓΔ = ΓΒ, ΓΖ = ΓΝ καὶ ἐπομένως ΔΖ = ΒΝ. Τὸ ἄθροισμα δ τῶν τμημάτων τῶν ΑΜ καὶ ΒΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΜ + ΔΖ. Εἶναι, κατὰ συνέπειαν, γνωστὸν τὸ μῆκος ΖΜ = ΑΔ — δ, τοῦ δὲ τριγώνου ΜΖΝ γνωστὰ ἡ πλευρὰ ΜΖ, ἡ γωνία ΜΖΝ (ἀφοῦ ἡ ΖΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΑ) καὶ ἡ πλευρὰ ΜΝ = λ.

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ΔΗ = ΑΔ — δ, τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΒΔ (παραλλήλου πρὸς τὴν ΕΑ) καὶ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Η καὶ ἀκτῖνα λ, ὁρίζει τὴν τρίτην κορυφὴν Θ τριγώνου ΔΗΘ, ἴσου προφανῶς πρὸς τὸ ΜΖΝ. Ἡ ἐκ τοῦ Θ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΧ ὁρίζει τὸ σημεῖον Ν καὶ ἡ ἐξ αὐτοῦ παράλληλος πρὸς τὴν ΘΗ τὸ σημεῖον Μ.

Πρόβλημα 451

1424. Δίδονται περιφέρεια (Ο), διάμετρος ΑΒ αὐτῆς καὶ εὐθεῖα xy. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ χορδὴ τῆς περιφερείας, παράλληλος τῆς xy καὶ τοιαύτη ὥστε ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ νὰ ἔχῃ μῆκος δοθὲν λ.

Σχ. 903.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΖΗ = λ.

Διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς χορδῆς ἂς φέρωμεν τὴν ΙΚ, ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΖΗ. Διὰ μιᾶς *παραλλήλου μεταφορᾶς* ἀγόμεθα ἀμέσως εἰς τὴν ἀκόλουθον λύσιν:

Φέρομεν εὐθεῖαν ΟΔΔ′ κάθετον ἐπὶ τὴν xy καὶ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Δ′ παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ λαμβάνομεν μήκη

$$Δ'I' = Δ'K' = \frac{λ}{2}.$$

Ἐκ τῶν Ι′ καὶ Κ′ φέρομεν τὰς καθέτους Ι′Γ′, Κ′Ε′ ἐπὶ τὸ τμῆμα Ι′Κ′· θὰ ἔχωμεν Δ′Γ′ = Δ′Ε′ καὶ αἱ κάθετοι εἰς Γ′ καὶ Ε′ ἐπὶ τὴν xy ὁρίζουν τὰ σημεῖα Γ καὶ Ε ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο).

Πρόβλημα 451—Ι

1424 α. Διὰ δοθέντος σημείου Ρ νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΡΑΒ περιφερείας (Ο) τοιαύτη, ὥστε ἡ προβολὴ τῆς χορδῆς ΑΒ ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Ρ διαμέτρου νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος Α′Β′ = λ.

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν *πολικὴν* τοῦ σημείου Ρ πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν. Βλ. σχετικῶς *Questions de Géométrie* τοῦ Desboves, 2α ἐκδ., σ. 344 ἢ *I. d. M.*, 1899, σ. 165, n° 1412.

Πρόβλημα 452

1425. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς κορυφῆς Γ εὐθεῖα, αἱ προβολαὶ ἐπὶ τῆς ὁποίας τῶν πλευρῶν ΓΒ καὶ ΓΑ νὰ ἔχουν ἄθροισμα δοθὲν μῆκος λ.

Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα (C. G., N. A., 1864, σ. 313).

Ἔστω ΓΕ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, ΑΜ, ΒΝ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΕ καὶ ΓΜ + ΓΝ = λ. Ἐπειδὴ εὐθεῖαι ἴσαι καὶ παράλληλοι ἔχουν προβολὰς ἴσας ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἡ προβολὴ τῆς διαγωνίου ΓΔ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΒΔ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΕ θὰ ἔχῃ προφανῶς μῆκος λ, ἡ δὲ προβολὴ ἐπ' αὐτῆς τῆς κορυφῆς Δ αὐτοῦ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΓΔ.

Ἔστω Ε τομὴ τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ τῆς μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα λ. Ἐπειδὴ ΓΜ = ΝΕ, ὡς προβολαὶ τῶν ἴσων καὶ παραλλήλων εὐθειῶν ΓΑ καὶ ΒΔ, θὰ εἶναι

$$ΓΜ + ΓΝ = ΓΕ = λ,$$

καί, ἑπομένως, ἡ εὐθεῖα ΓΕ εἶναι ἡ ζητουμένη (ε).

Σχ. 900.

Τὸ σημεῖον Ε' δίδει τὴν δευτέραν λύσιν.

Αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) δύνανται νὰ εὑρίσκωνται ἑκατέρωθεν τῆς κορυφῆς Γ. Λ. χ.

$$ΡΓ + ΓΠ = λ.$$

Καθ' ὅμοιον πρὸς τὸν προηγούμενον συλλογισμόν, ἀγόμεθα εἰς τὴν θεώρησιν τοῦ παραλληλογράμμου ΓΑΒΖ, εἰς τὴν γραφὴν τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΓΖ καὶ εἰς τὰς τομὰς αὐτῆς Θ καὶ Θ' μὲ τὰ τῆς (Γ, λ) ([84]). Θὰ ἔχωμεν πάλιν

$$ΡΠ = ΓΘ = λ,$$

ἀφοῦ ΡΓ = ΠΘ.

Διερεύνησις. Ἔστω ΑΒ < ΓΔ.

1) Διὰ λ < ΑΒ < ΓΔ, ὑπάρχουν τέσσαρες λύσεις, αἱ διδόμεναι ὑπὸ τῶν σημείων Θ, Η, Θ', Η'.

2) Διὰ λ = ΑΒ < ΓΔ, ὑπάρχουν τρεῖς λύσεις, ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια (Γ, λ) ἐφάπτεται τῆς μὲ διάμετρον ΓΖ.

3) ΑΒ < λ < ΓΔ: Δύο λύσεις, ἐπειδὴ ἡ (Γ, λ) καὶ ἡ (ΓΖ) δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα.

4) λ = ΓΔ: Μία λύσις.

5) λ > ΓΔ: Οὐδεμία λύσις.

Πρόβλημα 453

1426. Διὰ σημείου Ο εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γωνίας ΒΑΓ, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΒΟΓ περατουμένη εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας καὶ τοιαύτη ὥστε ΟΒ . ΟΓ = k^2, δοθὲν τετράγωνον.

Ἡ χρῆσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων δίδει τὴν ἁπλουστέραν λύσιν (*Μέθοδοι*, § 97)· κατωτέρω δίδομεν μίαν ἄλλην, ἀλλ' ὀλιγώτερον ἁπλῆν τῆς γενικῆς.

---

84. Σημ. μετ. Διὰ τὴν σαφήνειαν καὶ οἰκονομίαν τοῦ σχήματος ἐλήφθη ΓΒ > ΓΘ, μολονότι τὰ μήκη αὐτὰ εἶναι ἴσα πρὸς λ ἀμφότερα.

Ἔστω ΒΟΓ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, ΑΟΔ καὶ ΓΔ χορδαὶ τῆς περιφερείας (ΑΒΓ). Ἐπειδὴ

$$ΟΑ \,.\, ΟΔ = ΟΒ \,.\, ΟΓ = k^2,$$

δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος ΟΔ, ἀφοῦ εἶναι γνωστὸν τὸ ΟΑ :

$$\frac{ΑΟ}{k} = \frac{k}{ΟΔ}.$$

Σχ. 907.

Καὶ ἐπειδή, προσέτι, ἡ γνωστὴ γωνία μ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΟ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΟΓΔ = ν, τὸ σημεῖον Γ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ καὶ τοῦ τόξου, τοῦ διερχομένου διὰ τῶν Ο, Δ καὶ δεχομένου γωνίαν ν = μ.

Ἡ εὐθεῖα ΓΟΔ εἶναι τότε τελείως ὡρισμένη.

Πρόβλημα 453—I

1427. Διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων δύο τεμνομένων περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτῶν τοιαύτη, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἐπ' αὐτῆς χορδῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

Δυνάμεθα νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους. (*Μέθοδοι*, § 97).

Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΘΑΓ λαμβάνομεν μῆκος ΘΕ, ὥστε ΓΘ . ΓΕ = k^2 καὶ φέρομεν εὐθεῖαν εἰς τὸ Ε κάθετον ἐπὶ τὴν ΘΓΕ. Ἡ τομὴ Ν αὐτῆς καὶ τῆς (Β) ὁρίζει τὴν ζητουμένην τέμνουσαν ΝΓΜ.

Σχ. 908.

Πρόβλημα 453—II

1427 α. Δίδονται περιφέρεια (Ο) καὶ δύο σημεῖα αὐτῆς Α καὶ Β. Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας τοιαύτη, ὥστε αἱ ἀποστάσεις τῶν Α καὶ Β ἀπ' αὐτῆς νὰ ἔχουν γινόμενον δοθὲν k^2. (*Mathesis*, 1892, σ. 238).

Αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς k, ὁρίζουν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ζητουμένων ἐφαπτομένων.

Σχ. 909.

Πράγματι, ἔστω Γ ἓν ἐκ τῶν σημείων τούτων, Α', Β' αἱ προ-

βολαὶ τῶν Α, Β ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Γ καὶ Γ' ἡ προβολὴ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐκ τῶν ὁμοίων πρὸς ἄλληλα τριγώνων ΔΑΑ', ΔΒΒ', ΔΓΓ', εὑρίσκομεν τὰς ἀναλογίας

$$\frac{\Delta A}{AA'} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\Gamma'}, \quad \frac{\Delta B}{BB'} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\Gamma'}.$$

Ἄρα,

$$AA' = \Gamma\Gamma' . \frac{\Delta A}{\Delta\Gamma}, \quad BB' = \Gamma\Gamma' . \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma},$$

καὶ ἑπομένως

$$AA' . BB' = \Gamma\Gamma'^2 . \frac{\Delta A . \Delta B}{\Delta\Gamma^2} = \Gamma\Gamma'^2,$$

ἀφοῦ

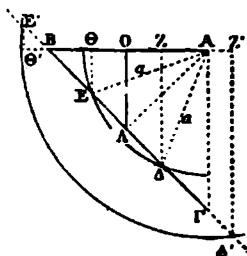
$$\Delta\Gamma^2 = \Delta B . \Delta A.$$

Πρόβλημα 454

1428. **Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων νὰ εἶναι δοθὲν τετράγωνον α^2.**

Ἔστω $AZ^2 + BZ^2 = \alpha^2$.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον διαιρέσεως Ζ ὑψώσωμεν κάθετον καὶ ἐπὶ ταύτης λάβωμεν μῆκος ΖΔ = ΖΒ, τὸ μῆκος ΑΔ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς α. Ἐντεῦθεν ἡ ἀκόλουθος κατασκευή.



Σχ. 010

Κατασκευάζομεν τρίγωνον ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον ΑΒΓ καὶ μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν, τέμνουσαν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ εἰς Δ καὶ Ε. Αἱ προβολαὶ τῶν σημείων τούτων ἐπὶ τὴν ΑΒ εἶναι τὰ δύο, ἐν γένει, ζητούμενα σημεῖα διαιρέσεως. Πράγματι,

$$A\Theta^2 + \Theta E^2 = A\Theta^2 + \Theta B^2 = \alpha^2.$$

(Julius Petersen, *Méthodes et théories*, σ. 10).

Διερεύνησις. Ὑπάρχουν δύο, ἐν γένει, λύσεις. Ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ α εἶναι τὸ μῆκος ΑΛ, κάθετος ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἐπειδὴ τότε ἡ περιφέρεια (Α, α) ἐφάπτεται τῆς ΒΓ καὶ εἶναι

$$A\Lambda^2 = 2 . AO^2 = \frac{1}{2} AB^2.$$

Ἐὰν $\alpha < \frac{AB}{\sqrt{2}} = AO\sqrt{2}$, δὲν ὑπάρχει λύσις.

Διὰ α = ΑΒ, ἓν τῶν τμημάτων μηδενίζεται καὶ τὸ ἄλλο εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ τμῆμα ΑΒ. Διὰ δὲ α > ΑΒ, τὰ σημεῖα διαιρέσεως Ζ', Θ' εἶναι ἐξωτερικὰ τοῦ τμήματος ΑΒ:

$$Z'A^2 + Z'B^2 = \Theta A^2 + \Theta' B^2 = E'A^2 = \Delta' A^2 = \alpha^2.$$

Πρόβλημα 455

1429. **Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα AB εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων νὰ εἶναι δοθὲν τετράγωνον $α^2$.**

Ἔστω $BZ^2 - AZ^2 = α^2$.

Διὰ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς καθέτου ΖΔ ἐπὶ τὴν AB, θὰ εἶναι

$$BΔ^2 - AΔ^2 = BZ^2 - AZ^2 = α^2.$$

Ἐντεῦθεν:

Ὑψοῦμεν κάθετον $AΓ = α$ ἐπὶ τὴν AB καὶ μὲ κέντρον B καὶ ἀκτῖνα BΓ γράφομεν περιφέρειαν. Τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς καὶ τῆς μὲ κέντρον A καὶ ἀκτῖνα AB ὁρίζουν εὐθεῖαν ΔΕ, τέμνουσαν τὴν AB εἰς τὸ σημεῖον διαιρέσεως Z.

Δι' ἐναλλαγῆς τῶν ἀκτίνων τῶν περιφερειῶν τούτων, εὑρίσκομεν καὶ τὴν Δ'ΘΕ' εὐθεῖαν, συμμετρικὴν τῆς πρώτης πρὸς τὸ μέσον O τῆς AB.

Σχ. 911.

Διερεύνησις. 1) Ἡ διαφορὰ δύναται νὰ εἶναι μηδέν, ὁπότε $Z \equiv Θ \equiv O$.

2) Ὑπάρχουν ἐν γένει δύο λύσεις Z, Θ.

3) Ἐὰν $α = AB$, τὰ A καὶ B σημεῖα ἀπαντοῦν εἰς τὸ πρόβλημα, ἀφοῦ ἓν τῶν τμημάτων θὰ εἶναι μηδέν.

4) Διὰ $α > AB$, τὰ σημεῖα διαιρέσεως εἶναι ἐξωτερικὰ τῆς εὐθείας AB.

Πρόβλημα 455—I

1430. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τυχούσης γωνίας O, λαμβάνομεν μῆκος OU ἴσον πρὸς τὴν μονάδα τῶν μηκῶν, καὶ ἄλλο OA τυχὸν α. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν UA καὶ ἀκολούθως κατασκευάζομεν τὰς γωνίας

$$OAB = OBΓ = OΓΔ \dots,$$

πάσας ἴσας πρὸς τὴν OUA. Ζητεῖται ὅπως ἐκφρασθοῦν τὰ μήκη OB, OΓ, OΔ, OE... συναρτήσει τοῦ ἀριθμοῦ α.

Σχ. 912.

Ἂς παραστήσωμεν διὰ τῶν u, α, β, γ, δ, ε... τὰ μήκη OU, OA, OB κλπ. Ἐκ κατασκευῆς, αἱ UA, BΓ, ΔΕ... εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας, ὡς καὶ AB, ΓΔ..., τὰ δὲ τρίγωνα OUA, OAB, OBΓ, OΓΔ... πάντα ὅμοια πρὸς ἄλληλα. Διὰ συγκρίσεως ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων πρὸς τὸ ἑπόμενόν του, εὐκόλως καταλήγομεν εἰς τὴν σχέσιν:

$$\frac{OU}{OA} = \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OΓ} = \frac{OΓ}{OΔ} = \frac{OΔ}{OE} \dots,$$

ἢ τὴν

$$\frac{u}{α} = \frac{α}{β} = \frac{β}{γ} = \frac{γ}{δ} = \frac{δ}{ε} \dots,$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$u\beta = \alpha^2, \quad \text{ἤ, ἀφοῦ } u = 1, \qquad \beta = \alpha^2,$$
$$\alpha\gamma = \beta^2 = \alpha^4 \qquad \text{ἤ} \qquad \gamma = \alpha^3,$$
$$\beta\delta = \gamma^2 = \alpha^6 \qquad \text{ἤ} \qquad \delta = \alpha^4,$$
$$\gamma\varepsilon = \delta^2 = \alpha^8 \qquad \text{ἤ} \qquad \varepsilon = \alpha^5,$$

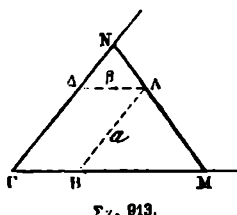
καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημείωσις. Σχετικῶς βλέπε διάφορα ἄρθρα εἰς *J. M. E.*, καὶ ἰδιαιτέρως τοῦ 1893, σ. 246, ὑπὸ G. Dargens.

Ἀναζήτησις ἀριθμητικῶν σχέσεων

Πρόβλημα 456

1431. Διὰ τῆς κορυφῆς Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν εὐθεῖαν ΑΜΝ, τέμνουσαν τὰς ΓΒ, ΓΔ εἰς Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως. Ποία ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ μήκη ΒΜ, ΔΝ πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου;



Σχ. 913.

Ἔστωσαν $AB = \Gamma\Delta = \alpha$, $A\Delta = B\Gamma = \beta$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΜ, ΝΔΑ εὑρίσκομεν

$$\frac{BM}{\alpha} = \frac{\beta}{\Delta N},$$

ἤ
$$BM \cdot \Delta N = \alpha\beta, \tag{1}$$

ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις.

1432. *Παρατήρησις.* Τὰ σημεῖα Μ, Ν γράφουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Γ *ὁμογραφικὰς σημειοσειρὰς* (§ 1298 α).

Πρόβλημα 456—I

1433. Εἰς τὸ ἴδιον πρόβλημα, νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν ΓΜ, ΓΝ.

Ἔχομεν,

$$BM = \Gamma M - \beta, \qquad \Delta N = \Gamma N - \alpha,$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν

$$(\Gamma M - \beta)(\Gamma N - \alpha) = \Gamma M \cdot \Gamma N - \alpha\Gamma M - \beta\Gamma N + \alpha\beta = \alpha\beta,$$

ἤ
$$\Gamma M \cdot \Gamma N = \alpha\Gamma M + \beta\Gamma N. \tag{2}$$

Πρόβλημα 456—II

1434. Εἰς τὸ ἴδιον ἐπίσης πρόβλημα, νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν ΓΜ, ΓΝ, ὅταν τὸ σημεῖον Α εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος καὶ $\alpha = \beta$. Ὁ τύπος (2) γίνεται :

$$\Gamma M \,.\, \Gamma N = \alpha(\Gamma M + \Gamma N),$$

ἤ

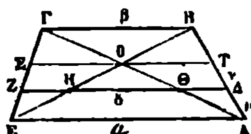
$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\Gamma M} + \frac{1}{\Gamma N}\,.$$

1435. Σημείωσις. Ὁ Maclaurin ὠνόμασε *μέσην ἁρμονικὴν* δοθεισῶν ποσοτήτων, τὴν ποσότητα τῆς ὁποίας τὸ ἀντίστροφον εἶναι ἡ μέση ἀριθμητικὴ τῶν ἀντιστρόφων τῶν ν ποσοτήτων. Τὸ μῆκος α λ.χ. εἶναι ἡ μέση ἀριθμητικὴ τῶν ΓΜ καὶ ΓΝ.

Ὁ Poncelet εἰς τὸ *Traité des propriétés projectives des Figures* αὐτοῦ, ἐπεξέτεινε τὴν ἔννοιαν τῆς *μέσης ἁρμονικῆς* καὶ ἐφήρμοσε αὐτήν, δι' ἓν ὁσονδήποτε πλῆθος σημείων ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, εἰς τὴν σπουδὴν τῶν *ἀλγεβρικῶν καμπύλων*. Βλ. τόμ. II, πρῶτον τμῆμα : *Théorie générale des centres de moyennes harmoniques* (σ. 1 ἕως 50)

Πρόβλημα 457

1436. Τὴν πλευρὰν ΑΒ τραπεζίου ΑΒΓΔ διαιροῦμεν εἰς δύο μέρη ΑΔ, ΔΒ ἀνάλογα τῶν μ καὶ ν μηκῶν καὶ διὰ τοῦ σημείου διαιρέσεως φέρομεν εὐθεῖαν ΔΖ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ μῆκος τῆς παραλλήλου ταύτης συναρτήσει τῶν μ, ν καὶ τῶν βάσεων α, β τοῦ τραπεζίου.



Σχ. 914

Τοῦ ζητήματος τούτου ἐπελήφθημεν ἤδη ὡς θεωρήματος (§ 1200), ἕνεκα τῶν ἐφαρμογῶν του. Δύναται ὅμως νὰ τεθῇ καὶ ὡς πρόβλημα.

Ἔστω $AE = \alpha,\quad B\Gamma = \beta,\quad \Delta Z = \delta,\quad \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu}$.

$$\frac{B\Theta}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\Delta\Theta}{\beta} = \frac{\mu}{\mu+\nu} \quad \text{καὶ} \quad \Delta\Theta = \beta\,.\,\frac{\mu}{\mu+\nu}$$

$$\frac{Z\Theta}{EA} = \frac{B\Delta}{AB} \quad \text{ἤ} \quad \frac{Z\Theta}{\alpha} = \frac{\nu}{\mu+\nu} \quad \text{καὶ} \quad Z\Theta = \alpha\,.\,\frac{\nu}{\mu+\nu}\,.$$

Συνεπῶς,

$$\delta = \frac{\alpha\nu + \beta\mu}{\mu + \nu}\,. \qquad (1)$$

1437. Παρατηρήσεις. 1) Τὸ μεταξὺ τῶν διαγωνίων τμῆμα ΘΗ εἶναι ἴσον πρὸς $\Delta H - \Delta\Theta = Z\Theta - \Delta\Theta$ ἤ

$$\Theta H = \frac{\alpha\nu - \beta\mu}{\mu + \nu}\,. \qquad (2)$$

2) Ἡ τιμὴ τοῦ τμήματος ΤΣ, διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων, λαμβάνεται ἐκ τοῦ τύπου (1) διὰ $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{\beta}$:

$$T\Sigma = \frac{2\,\alpha\beta}{\alpha + \beta}\,, \qquad (3)$$

τύπος ἤδη γνωστὸς (§ 1199).

Πρόβλημα 457—Ι

1438. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΑΒ τραπεζίου λαμβάνομεν σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{μ}{ν}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ μεταξὺ τῶν διαγωνίων τμήματος ΘΗ.

Σχ. 91

Εὑρίσκομεν:

$$ΔΗ = \frac{αν}{μ-ν}, \quad ΔΘ = \frac{βμ}{μ-ν}$$

καὶ ἑπομένως

$$ΘΗ = \frac{αν+βμ}{μ-ν} \qquad (4)$$

1439. *Παρατηρήσεις.* 1) ΔΘ = ΖΗ· ἄρα

$$ΔΖ = ΔΘ - ΔΗ = \frac{βμ-αν}{μ-ν}.$$

2) Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ μήκους ΙΚ, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον (4) τὰ ν καὶ μ διὰ τῶν β καὶ α ἀντιστοίχως, ἐπειδὴ $\frac{ΛΒ}{ΛΑ} = \frac{β}{α}$. Λαμβάνομεν

$$ΙΚ = \frac{2αβ}{α-β}. \quad (§\ 1199).$$

Πρόβλημα 458

1440. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν βάσεων τραπεζίου συναρτήσει τῶν τεσσάρων πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἔστωσαν α, γ τὰ μήκη τῶν βάσεων, β καὶ δ τὰ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

Διὰ τοῦ μέσου Ν τῆς ΔΓ φέρομεν παραλλήλους ΝΛ, ΝΟ, πρὸς τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς τοῦ τραπεζίου. Θὰ ἔχωμεν

$$ΛΜ = ΜΟ = \frac{1}{2}(α-γ),$$

Σχ. 916.

τὸ δὲ τρίγωνον ΟΝΛ εἶναι ὡρισμένον, ἀφοῦ αἱ τρεῖς πλευραί του ἔχουν γνωστὰ μήκη.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων, θὰ εἶναι

$$ΜΝ^2 = \frac{β^2+δ^2}{2} - \frac{1}{4}(α-γ)^2,$$

ἢ

$$ΜΝ^2 = \frac{2(β^2+δ^2+αγ)-(α^2+γ^2)}{4}.$$

Πρόβλημα 458—I

1441. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ MN συναρτήσει τῶν α, γ καὶ τῶν μηκῶν τῶν διαγωνίων μ, ν.

Φέροντες διὰ τοῦ σημείου N παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους, σχηματίζομεν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει μῆκος $\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$. Θὰ ἔχωμεν δὲ πάλιν

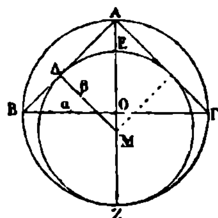
$$MN^2 = \frac{\mu^2+\nu^2}{2} - \frac{1}{4}(\alpha+\gamma)^2,$$

ἢ

$$MN^2 = \frac{2(\mu^2+\nu^2-\alpha\gamma)-(\alpha^2+\gamma^2)}{4}.$$

Πρόβλημα 458—II

1442. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν (O, α) εἶναι ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ἀκτὶς β τῆς περιφερείας, τῆς ἐφαπτομένης τῆς δοθείσης καὶ τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.



Σχ. 917.

Ἔστωσαν

$$BO = AO = OZ = \alpha, \quad A\Delta = \Delta M = MZ = \beta.$$

Θὰ εἶναι

$$AE \cdot AZ = A\Delta^2 \quad \text{ἢ} \quad (2\alpha-2\beta)2\alpha = \beta^2,$$

ἢ

$$\beta^2 + 4\alpha\beta = 4\alpha^2.$$

Αὕτη εἶναι ἡ σχέσις ἐξ ἧς ὁρίζεται τὸ μῆκος β (§ 298).

Πρόβλημα 458—III

1443. Διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων δύο περιφερειῶν φέρομεν κοινὴν αὐτῶν τέμνουσαν. Νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν μηκῶν τῶν ἐπ' αὐτῆς χορδῶν, τῶν ἀκτίνων τῶν περιφερειῶν καὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 308).

Παριστῶντες τὸ μῆκος τῆς διακέντρου διὰ δ, τὰ μήκη τῶν χορδῶν διὰ x καὶ y καὶ τὰ τῶν ἀκτίνων διὰ ρ καὶ R, εὑρίσκομεν:

$$\delta^2 = (x+y)^2 + (\sqrt{R^2-y^2} - \sqrt{\rho^2-x^2})^2.$$

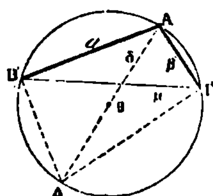
Πρόβλημα 459

1444. Δίδονται περιφέρεια, δύο σημεῖα σταθερὰ A καὶ B αὐτῆς καὶ χορδὴ EZ. Ἐὰν συνδέσωμεν τυχὸν σημεῖον Γ τῆς περιφερείας πρὸς τὰ A καὶ B, αἱ χορδαὶ ΓA, ΓB ὁρίζουν ἐπὶ τῆς EZ σημεῖα M, N καὶ τμήματα ἐπ' αὐτῆς EM, EN, NZ. Ποία ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν μηκῶν τῶν τμημάτων τούτων;

(*Μέθοδοι*, § 326).

Πρόβλημα 460

1445. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο τόξων περιφερείας, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς καὶ τῶν χορδῶν τῶν τόξων.



Σχ. 918.

Ἔστωσαν α, β αἱ δοθεῖσαι χορδαί, δ ἡ διάμετρος, μ καὶ ν αἱ χορδαὶ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων.

Κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου (§ 1209), εὑρίσκομεν

$$\mu\delta = \alpha \, . \, \Delta\Gamma + \beta \, . \, \Delta B.$$

Ἕνεκα τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ, εἶναι

$$B\Delta = \sqrt{\delta^2 - \alpha^2}, \quad \Delta\Gamma = \sqrt{\delta^2 - \beta^2},$$

καὶ ἐπομένως

$$\mu = \frac{\alpha\sqrt{\delta^2 - \beta^2} + \beta\sqrt{\delta^2 - \alpha^2}}{\delta}.$$

Ὁμοίως,

$$\nu = \frac{\alpha\sqrt{\delta^2 - \beta^2} - \beta\sqrt{\delta^2 - \alpha^2}}{\delta}.$$

Πρόβλημα 461

1446. Δύο ἐξωτερικαὶ ἀλλήλων περιφέρειαι ἔχουν κέντρα Α, Β, ἀκτῖνας ρ, ρ' καὶ διάκεντρον μήκους δ. Συναρτήσει τῶν ρ, ρ' καὶ δ νὰ ἐκφρασθοῦν αἱ ἀποστάσεις ΑΟ, ΒΟ ἑκάστου κέντρου ἀπὸ τοῦ σημείου τομῆς Ο τῶν ἐξωτερικῶν κοινῶν ἐφαπτομένων, τὰ μήκη τῶν χορδῶν ἐπαφῆς καὶ αἱ ἀποστάσεις ἑκάστης χορδῆς ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων κέντρων.

Φέρομεν τὴν ΒΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ:

$$A\Lambda = \rho - \rho', \quad \lambda = \sqrt{\delta^2 - (\rho - \rho')}, \quad (\rho > \rho').$$

1) Τὰ ὅμοια πρὸς ἄλληλα τρίγωνα ΑΟΓ, ΑΒΛ, ΒΟΔ παρέχουν τὰς ἀναλογίας:

$$\frac{AO}{AB} = \frac{A\Gamma}{A\Lambda} \text{ ἢ } \frac{AO}{\delta} = \frac{\rho}{\rho - \rho'} \text{ καὶ } AO = \frac{\delta\rho}{\rho - \rho'}, \qquad (1)$$

$$\frac{BO}{AB} = \frac{B\Delta}{A\Lambda} \text{ ἢ } \frac{BO}{\delta} = \frac{\rho'}{\rho - \rho'} \text{ καὶ } BO = \frac{\rho'\delta}{\rho - \rho'}. \qquad (2)$$

Ἐπίσης,

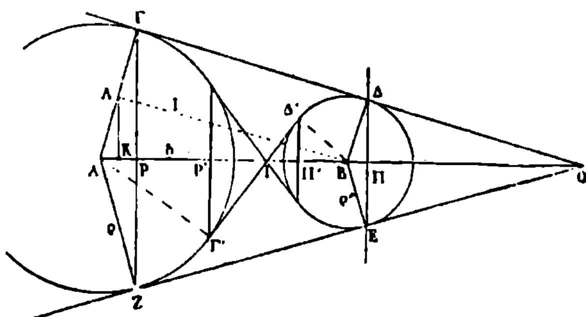
$$\Gamma O = \frac{\rho\lambda}{\rho - \rho'}, \quad \Delta O = \frac{\rho'\lambda}{\rho - \rho'}.$$

2)

$$AP = \frac{\rho(\rho - \rho')}{\delta}, \qquad (3)$$

$$B\Pi = \frac{\rho'(\rho - \rho')}{\delta}. \qquad (4)$$

3) $$\Gamma P = \sqrt{AP \cdot PO} = \frac{\rho\lambda}{\delta}, \quad (5) \qquad \Delta\Pi = \frac{\rho'\lambda}{\delta}, \quad (6)$$



Σχ. 919.

4) $$P\Pi = \frac{\lambda^2}{\delta}. \quad (7)$$

Παρατήρησις. Αἱ εὐθεῖαι ΓΡ, ΔΠ εἶναι αἱ πολικαὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ κέντρου ὁμοιότητος Ο, αἱ δὲ Γ'Ρ', Δ'Π' αἱ τοῦ ἐσωτερικοῦ Ι πρὸς τὰς δύο περιφερείας.

Πρόβλημα 461—Ι

1447. **Τὸ αὐτὸ ζήτημα, ἀλλ' ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιότητος Ι, δηλ. τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν κοινῶν ἐφαπτομένων τῶν περιφερειῶν.**

Ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις τὰ $\rho-\rho'$ καὶ λ διὰ τῶν $\rho+\rho'$ καὶ $\lambda' = \sqrt{\delta^2-(\rho+\rho')^2}$. Εὑρίσκομεν:

$$AI = \frac{\rho\delta}{\rho+\rho'}, \quad (1') \qquad BI = \frac{\rho'\delta}{\rho+\rho'}, \quad (2')$$

$$\Gamma'I = \frac{\rho\lambda'}{\rho+\rho'}, \qquad \Delta'I = \frac{\rho'\lambda'}{\rho+\rho'},$$

$$AP' = \frac{\rho(\rho+\rho')}{\delta}, \quad (3') \qquad B\Pi' = \frac{\rho'(\rho+\rho')}{\delta}, \quad (4')$$

$$\Gamma'P' = \frac{\rho\lambda'}{\delta}, \quad (5') \qquad \Delta'\Pi' = \frac{\rho'\lambda'}{\delta}, \quad (6')$$

$$P'\Pi' = \frac{\lambda'^2}{\delta}. \quad (7')$$

Πρόβλημα 462

1448. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος γ τῆς πλευρᾶς καὶ τὸ τοῦ ἀποστήματος κανονικοῦ δωδεκαγώνου, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας.**

Ἔστω κανονικὸν πολύγωνον πλευρᾶς γ. Ἡ πλευρὰ γ′ τοῦ εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν μετὰ τοῦ δοθέντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου καὶ μὲ διπλάσιον πλῆθος πλευρῶν διδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\gamma' = \sqrt{2\rho^2 - \rho\sqrt{4\rho^2 - \gamma^2}}.$$

Ἡ πλευρὰ γ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα· ἄρα

$$\gamma' = \rho\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Τὸ ἀπόστημα α′ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

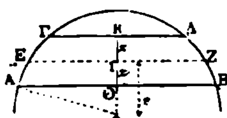
$$\alpha' = \sqrt{\rho^2 - \frac{\gamma'^2}{4}}$$

ἢ

$$\alpha' = \frac{\rho}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Πρόβλημα 463

1449. Νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ δύο χορδῶν παραλλήλων δοθείσης περιφερείας, τῆς ἴσον ἀπεχούσης αὐτῶν χορδῆς καὶ τῆς ἀποστάσεως 2z τῶν δύο πρώτων παραλλήλων χορδῶν.



Σχ. 920.

Ἐὰν ὀνομάσωμεν ρ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας, 2μ τὴν χορδὴν ΑΒ, 2ν τὴν ΓΔ, 2λ τὴν μέσην χορδὴν ΕΖ, 2z τὴν ἀπόστασιν τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, καὶ ε τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς μέσης χορδῆς, εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{A\Theta}^2 + \mathrm{O\Theta}^2$$

ἢ $$\rho^2 = \mu^2 + (\varepsilon - z)^2 = \mu^2 + \varepsilon^2 + z^2 - 2\varepsilon z. \qquad (1)$$

Ἐπίσης,

$$\rho^2 = \nu^2 + (\varepsilon + z)^2 = \nu^2 + \varepsilon^2 + z^2 + 2\varepsilon z \qquad (2)$$

$$\rho^2 = \lambda^2 + \varepsilon^2$$

ἢ $$2\rho^2 = 2\lambda^2 + 2z^2. \qquad (3)$$

Ἐπομένως,

$$(1) + (2) - (3) = 0 = \mu^2 + \nu^2 - 2\lambda^2 + 2z^2$$

ἢ $$(2\mu)^2 + (2\nu)^2 = 2(2\lambda)^2 - 2(2z)^2,$$

δηλ. $$\mathrm{AB}^2 + \Gamma\Delta^2 = 2\,\mathrm{EZ}^2 - 2\,\Theta\mathrm{H}^2,$$

ἢ :

Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο παραλλήλων χορδῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς μέσης χορδῆς, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεως τῶν παραλλήλων χορδῶν.

Πρόβλημα 464

1450. Συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος περιφερείας καὶ τοῦ μήκους τῆς χορδῆς δοθέντος τόξου αὐτῆς, νὰ ἐκφρασθοῦν :

1) Τὸ ἀπόστημα τῆς χορδῆς καὶ τὸ βέλος τοῦ τόξου.

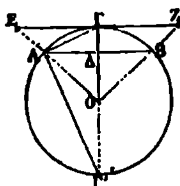
2) Τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τῆς ὑποτεινούσης τόξον ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος.

3) Τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ἐφαπτομένης, παραλλήλου πρὸς τὴν χορδήν, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἀκτίνων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου.

1) Ἔστω α τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΟ, εὑρίσκομεν

$$Ο\Delta^2 = \rho^2 - \frac{\alpha^2}{4}, \quad Ο\Delta = \sqrt{\rho^2 - \frac{\alpha^2}{4}}.$$

Τὸ βέλος ΔΓ = ΟΓ — ΟΔ εἶναι ἴσον πρὸς



Σχ. 921.

$$\Delta\Gamma = \rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{\alpha^2}{4}}.$$

2) Ἡ χορδὴ ΑΓ, τοῦ ἡμίσεος τόξου τοῦ δοθέντος, εἶναι ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας. Ἄρα

$$Α\Gamma^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \left(\rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{\alpha^2}{4}}\right)^2.$$

3) Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ μήκους ΕΖ, βοηθούμεθα ὑπὸ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΟΖ καὶ ΑΟΒ. Θὰ ἔχωμεν:

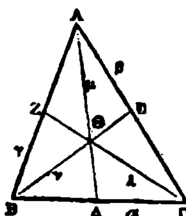
$$\frac{ΕΖ}{ΑΒ} = \frac{Ο\Gamma}{Ο\Delta}, \quad ΕΖ = \frac{ΑΒ \cdot Ο\Gamma}{Ο\Delta}.$$

Συνεπῶς,

$$ΕΖ = \frac{\alpha\rho}{\sqrt{\rho^2 - \frac{\alpha^2}{4}}}.$$

Πρόβλημα 465

1451. **Νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαμέσων ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου.**



Σχ. 922.

Εὑρίσκομεν :

$$\mu^2 + \nu^2 + \lambda^2 = \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

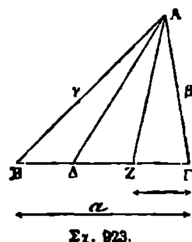
Δηλ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαμέσων τριγώνου ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Πρόβλημα 465—I

1452. **Διαιροῦμεν τὴν βάσιν τριγώνου εἰς τρία μέρη ἴσα καὶ φέρομεν τὰς ἑνούσας τὰ σημεῖα διαιρέσεως μετὰ τῆς κορυφῆς εὐθείας. Ζη-**

τεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν αὐτῶν συναρτήσει τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.



Σχ. 923.

Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέσου, εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας :

$$2(AZ)^2 + 2(Z\Gamma)^2 = A\Gamma^2 + A\Delta^2,$$

$$2(A\Delta)^2 + 2(B\Delta)^2 = AZ^2 + AB^2,$$

ἐξ ὧν

$$A\Delta^2 + AZ^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - \frac{4}{9} B\Gamma^2.$$

Παρατήρησις. Διὰ $B\Delta = Z\Gamma = \frac{\alpha}{4}$,

θὰ εἶναι $$A\Delta^2 + AZ^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - \frac{3}{8} B\Gamma^2.$$

Πρόβλημα 466

1453. **Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ τριγώνου δοθέντος :**

1) Τὰ ὕψη αὐτοῦ υ_α, υ_β, υ_γ.

2) Αἱ ἀποστάσεις k_α, k_β, k_γ τοῦ κέντρου O τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τῶν πλευρῶν.

Εὑρίσκομεν :

$$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},$$

1) $$\upsilon_\beta = \frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},$$

$$\upsilon_\gamma = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},$$

2) $$k_\alpha = \sqrt{\frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{16\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} - \frac{\alpha^2}{4}},$$

$$k_\beta = \sqrt{\frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{16\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} - \frac{\beta^2}{4}},$$

$$k_\gamma = \sqrt{\frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{16\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Ἡ ἐπιφάνεια E τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ἀκτὶς R τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας εἶναι, ἀντιστοίχως :

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},$$

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}.$$

Πρόβλημα 466—I

1453 α. Ὁμοίως.

3) Τὰς ἐσωτερικὰς διχοτόμους δ_α , δ_β , δ_γ .

4) Τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους δ'_α , δ'_β , δ'_γ .

Εὑρίσκομεν:

3)
$$\delta_\alpha = \sqrt{\beta\gamma - \frac{\alpha(\alpha\beta\gamma)}{(\beta+\gamma)^2}} = \frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)\beta\gamma},$$
$$\delta_\beta = \sqrt{\gamma\alpha - \frac{\beta(\alpha\beta\gamma)}{(\gamma+\alpha)^2}} = \frac{2}{\gamma+\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\beta)\gamma\alpha},$$
$$\delta_\gamma = \sqrt{\alpha\beta - \frac{\gamma(\alpha\beta\gamma)}{(\alpha+\beta)^2}} = \frac{2}{\alpha+\beta}\sqrt{\tau(\tau-\gamma)\alpha\beta}.$$

4)
$$\delta'_\alpha = \frac{2}{\beta-\gamma}\sqrt{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\beta\gamma},$$
$$\delta'_\beta = \frac{2}{\gamma-\alpha}\sqrt{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)\gamma\alpha},$$
$$\delta'_\gamma = \frac{2}{\alpha-\beta}\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)\alpha\beta}.$$

Πρόβλημα 466—II

1453 β. Ὁμοίως,

5) Αἱ διάμεσοι μ_α , μ_β , μ_γ .

6) Αἱ ἐσωτερικαὶ συμμετροδιάμεσοι μ'_α , μ'_β , μ'_γ .

7) Αἱ ἐξωτερικαὶ συμμετροδιάμεσοι μ''_α , μ''_β , μ''_γ .

Εὑρίσκομεν:

5)
$$\mu_\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\beta^2+\gamma^2-\frac{1}{2}\alpha^2\right)},$$
$$\mu_\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\gamma^2+\alpha^2-\frac{1}{2}\beta^2\right)},$$
$$\mu_\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)}.$$

6)
$$\mu'^2_\alpha = \frac{2\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2} - \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\beta^2+\gamma^2)^2},$$
$$\mu'^2_\beta = \frac{2\gamma^2\alpha^2}{\gamma^2+\alpha^2} - \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\gamma^2+\alpha^2)^2},$$
$$\mu'^2_\gamma = \frac{2\alpha^2\mu^2}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}.$$

$$\mu''_\alpha = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\beta^2 - \gamma^2)},$$

7) $$\mu''_\beta = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\gamma^2 - \alpha^2)},$$

$$\mu''_\gamma = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha^2 - \beta^2)}.$$

Ἐκ τῶν τελευταίων τούτων τύπων ἕπονται καὶ οἱ ἑξῆς:

$$\frac{1}{\mu''_\alpha} + \frac{1}{\mu''_\beta} + \frac{1}{\mu''_\gamma} = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{\mu''_\alpha} + \frac{\beta^2}{\mu''_\beta} + \frac{\gamma^2}{\mu''_\gamma} = 0.$$

Ἀποστάσεις διαφόρων σημείων ἀπ' ἀλλήλων

1453δ. Παριστῶντες, ὡς συνήθως, διά: Ο τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, Ι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, Θ τὸ κέντρον βάρους, Η τὸ ὀρθόκεντρον, Κ τὸ σημεῖον τοῦ *Lemoine*, Μ τὸ σημεῖον τοῦ *Gergonne*, Ν τὸ τοῦ *Nagel*, θ, Ω, Ω′ τὴν γωνίαν καὶ τὰ σημεῖα τοῦ *Brocard*, R, ρ τὰς ἀκτῖνας τῶν περιφερειῶν (Ο) καὶ (Ι) καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, θὰ ἔχωμεν:

$$OI^2 = R(R - 2\rho),$$

$$ON = R - 2\rho,$$

$$OH^2 = R^2(1 - 8 \text{ συν } A \text{ συν } B \text{ συν } \Gamma) = 9R^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

$$HI^2 = 4R^2 + 4R\rho + 3\rho^2 - \tau^2,$$

$$OM^2 = R^2 - \frac{4E\tau(R+\rho)}{(4R-\rho)^2},$$

$$9\,\Theta I^2 = \tau^2 + 5\rho^2 - 16R\rho,$$

$$9\,\Theta O^2 = 9R^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 9R^2 - 2(\tau^2 - \rho^2 - 4R\rho),$$

$$KI^2 = \frac{2R\rho(4R+\rho)}{E \text{ σφ } \theta} - 3R^2 \text{εφ}^2\theta,$$

$$KH^2 = R^2(\text{εφ}^2\theta - 4 \text{ συν } A \text{ συν } B \text{ συν } \Gamma (1 - \text{εφ}^2\theta)),$$

$$9\,K\Theta^2 = \frac{4E(1 + 2\text{ημ}^2\theta)}{\text{ημ } 2\theta} - 27R^2 \text{εφ}^2\theta.$$

Ἐὰν θέσωμεν $4R + \rho = \delta$, εὑρίσκομεν ἐπίσης

$$\Omega I^2 = 2R\left[\frac{\alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\beta}{(\tau^2 - \rho\delta)^2 + 4E^2} - 1\right],$$

$$\Omega O = \Omega' O = R\sqrt{1 - 4\text{ημ}^2\theta},$$

$$IM = \frac{\rho}{\delta}\sqrt{\delta^2 - 3\tau^2},$$

$$\Omega\Omega' = 2R \text{ ημ } \theta \sqrt{1 - 4\text{ημ}^2\theta},$$

$$OK = \frac{R}{\sigma\upsilon\nu\,\theta}\sqrt{1 - 4\,\eta\mu^2\theta},$$

$$\Omega K = \Omega' K = R\,\varepsilon\varphi\,\theta\sqrt{1 - 4\,\eta\mu^2\theta}.$$

Πρόβλημα 466—III

1454. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, συνδέομεν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Δ, Ε, Ζ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας μετὰ τῶν πλευρῶν πρὸς τὰς ἀπέναντι κορυφάς. Ἂν Ε′, Ζ′, Δ′ εἶναι τὰ δεύτερα σημεῖα τομῆς τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, ζητεῖται νὰ ἐκφρασθῇ ἡ παράστασις

$$A\Delta\,.\,A\Delta' + BE\,.\,BE' + \Gamma Z\,.\,\Gamma Z'$$

συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Σχ. 924.

Ἐπειδή,

$$A\Delta.A\Delta' = AZ^2 = \left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)^2 = (\tau-\alpha)^2,$$

$$BE.BE' = B\Delta^2 = \left(\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\right)^2 = (\tau-\beta)^2,$$

$$\Gamma Z\,.\,\Gamma Z' = \Gamma\Delta^2 = \left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)^2 = (\tau-\gamma)^2,$$

τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα ἔχει ὡς τιμὴν

$$\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)^2,$$

ἤ, μετά τινας πράξεις,

$$\frac{3}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \frac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha).$$

Πρόβλημα 467

1455. Δοθεισῶν δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν των, συναρτήσει τῆς καθέτου ἀποστάσεως αὐτῶν λ.

Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας, $\rho+\lambda$ ἡ τῆς ἐξωτερικῆς. Τὰ μήκη τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι ἀντιστοίχως

$$2\pi\rho \quad \text{καὶ} \quad 2\pi(\rho+\lambda),$$

καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν $2\pi(\rho+\lambda-\rho) = 2\pi\lambda$. Οὕτω:

Ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν εἶναι ἴση πρὸς τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μὲ ἀκτῖνα τὴν κάθετον ἀπ᾿ ἀλλήλων ἀπόστασιν.

1455 α. Παρατήρησις. Τὸ τόξον ἀνοίγματος ν μοιρῶν ἔχει μῆκος $\frac{\pi\rho\nu}{180^\circ}$ διὰ τὴν ἐσωτερικὴν περιφέρειαν καὶ $\frac{\pi(\rho+\lambda)\nu}{180^\circ}$ διὰ τὴν ἐξωτερικήν. Ἑπομένως,

Ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν δύο ὁμοίων τόξων δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν εἶναι ἴση πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ὁμοίου τόξου τῆς περιφερείας μὲ ἀκτῖνα τὴν κάθετον ἀπόστασιν τῶν δύο περιφερειῶν.

Πρόβλημα 467—I

1456. Δοθεισῶν δύο καμπύλων ΑΒΓΔ..., Α'Β'Γ'Δ'..., ἀποτελουμένων ἐκ τόξων ὁμοκέντρων περιφερειῶν, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν τῶν καμπύλων, σὺναρτήσει τῆς κοινῆς καθέτου ἀποστάσεως αὐτῶν.

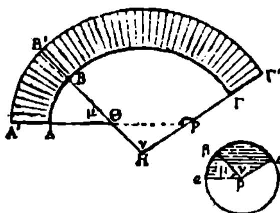
1) Ἔστωσαν μ καὶ ν αἱ γωνίαι, αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἀκτίνων εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΒΓ (Σχ. 925) καὶ λ ἡ ἀπόστασις τῶν *παραλλήλων* τόξων. Θὰ ἔχωμεν (§ 1455 α):

$$\widehat{A'B'} = \widehat{AB} + \frac{\pi\lambda\mu}{180}\,.$$

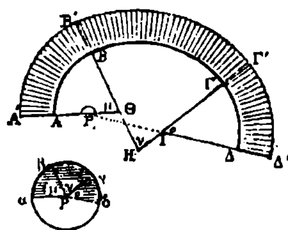
$$\widehat{B'\Gamma'} = \widehat{B\Gamma} + \frac{\pi\lambda\nu}{180}\,.$$

καὶ

$$\widehat{A'B'\Gamma'} = \widehat{AB\Gamma} + \frac{\pi\lambda(\mu+\nu)}{180} = \widehat{\alpha\beta\gamma} + \widehat{AB\Gamma}.$$



Σχ. 925.



Σχ. 926.

Δηλ. ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν τῶν καμπύλων εἶναι ἴση πρὸς τὸ τόξον αβγ τῆς περιφερείας μὲ ἀκτῖνα λ καὶ ἐπίκεντρον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν τῶν ἄκρων ἀκτίνων αὐτῶν $[=\widehat{\Theta AA', H\Gamma\Gamma'}]$.

2) Διὰ τρία τόξα, μὲ ἀντιστοίχους γωνίας μ, ν, ο (Σχ. 926), θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{A'B'\Gamma'\Delta'} = \widehat{AB\Gamma\Delta} + \frac{\pi\lambda(\mu+\nu+o)}{180} = \widehat{AB\Gamma\Delta} + \widehat{\alpha\beta\gamma\delta},$$

καὶ ἰσχύει ὁ ἴδιος, μὲ τὸν προηγούμενον, κανών.

3) Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ καμπυλότης τῶν τόξων ἀλλάζει σημεῖον (Σχ. 927). Εἶναι φανερὸν ὅτι

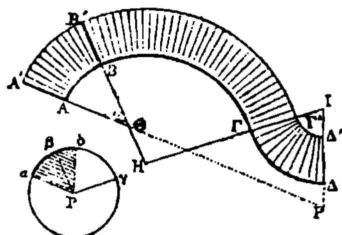
$$\widehat{A'B'\Gamma'\Delta'} = \widehat{AB\Gamma\Delta} + \frac{\pi\lambda}{180}(\mu+\nu-o) =$$

$$= \widehat{AB\Gamma\Delta} + \widehat{\alpha\beta} + \widehat{\beta\gamma} - \widehat{\gamma\delta} = \widehat{AB\Gamma\Delta} + \widehat{\alpha\delta}.$$

Ἡ διαφορὰ δηλ. πάλιν τῶν δύο καμπύλων ἰσοῦται πρὸς τὸ τόξον αδ τῆς περιφερείας μὲ ἀκτῖνα λ, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς ἐπίκεντρον γωνίαν $\widehat{\alpha P\delta}$, ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν τῶν ἄκρων ἀκτίνων (ἴδε κατωτέρω).

Κατὰ ταῦτα:

Ἐὰν δύο καμπύλαι ἀποτελοῦνται ἐκ κ. τόξων ὁμοκέντρων ἀνὰ δύο, ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς κυκλικὸν τόξον ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὴν κοινὴν κάθετον αὐτῶν ἀπόστασιν καὶ ἀνοίγματος ἴσου πρὸς τὴν γωνίαν φ τῶν ἄκρων ἀκτίνων.



Σχ. 927.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν *γωνίαν φ τῶν ἄκρων ἀκτίνων*, φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου Ρ ἀκτῖνας παραλλήλους καὶ τῆς *αὐτῆς φορᾶς* πρὸς τὰς ἄκρας ἀκτῖνας ΑΑ' καὶ ΙΔΔ'. Ἡ γωνία τῶν ἀκτίνων τούτων, *κατὰ τὴν φορὰν κινήσεως* ΑΒΓΔ ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν καμπύλων, εἶναι ἡ γωνία φ.

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει καὶ διὰ δύο *τυχούσας παραλλήλους καμπύλας*· ἀλλ' ἡ μελέτη τούτων ἐκφεύγει τῶν *Στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.*

1457. Σημείωσις. Ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη μεταξὺ δύο τυχουσῶν παραλλήλων καμπύλων καλεῖται *ταινία*. Ὑπεδείξαμεν ἀνωτέρω τὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τοῦ μήκους τῆς μιᾶς τῶν παραλλήλων καμπύλων συναρτήσει τοῦ μήκους τῆς ἄλλης καὶ τοῦ λ· εἰς τὸ IV Βιβλίον θὰ μάθωμεν νὰ ὑπολογίζωμεν καὶ τὴν μεταξὺ τῶν καμπύλων αὐτῶν ἐπιφάνειαν (§ 1584 - 1586).

Αἱ ταινίαι ἀπαντῶνται συχνὰ εἰς τὴν Ἀρχιτεκτονικήν, ὡς εἰς τὴν γεφυροποιΐαν κλπ.

Πρόβλημα 468

1458. **Δοθεισῶν τῶν περιμέτρων τ καὶ Τ, δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ἄλλο περιγεγραμμένον εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι περίμετροι τ', Τ' τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐχόντων διπλάσιον πλῆθος πλευρῶν καὶ ἀναφερομένων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.**

Εὑρίσκομεν,

$$T' = \frac{2\tau T}{\tau + T}, \quad \tau' = \sqrt{\tau T'}.$$

Παρατήρησις. Διὰ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ὁδηγούμεθα εὐκόλως εἰς κατὰ προσέγγισιν τιμὰς τοῦ π. Οἱ τύποι οὗτοι ὀφείλονται εἰς τὸν Saurin (1659—1737), μέλους (1723) τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τῶν Παρισίων (N. A., 1842, σ. 190).

Περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι

Πρόβλημα 469

1459. **Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας (Γ) καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ.**

Ἔστω (Δ) ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Τὸ κέντρον της Δ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΔ τῆς γωνίας ΑΟΒ.

Φέρομεν τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΔ καὶ τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ. Μὲ κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα ΔΓ γράφομεν τόξον ΕΓΖ καὶ φέρομεν τὴν ΖΘ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΖ ἢ παράλληλον τῆς ΟΒ. Θὰ ἔχωμεν

$$ΔΖ = ΔΓ,$$

$$ΔΗ = ΔΙ,$$

καὶ ἐξ ἀφαιρέσεως,

$$ΗΖ = ΙΓ = ρ.$$

Συνεπῶς :

Φέρομεν εὐθεῖαν ΖΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΟΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν ρ ἀπ' αὐτῆς. Ὁρίζομεν τὸ συμμετρικὸν Ε τοῦ σημείου Γ

Σχ. 928.

πρὸς τὴν ΟΔ καὶ γράφομεν περιφέρειαν διὰ τῶν Ε καὶ Γ, ἐφαπτομένην τῆς ΖΘ. Τὸ κέντρον αὐτῆς Δ εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ διὰ τῶν Γ καὶ Ε διέρχεται καὶ δευτέρα περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς ΖΘ, ὑπάρχει καὶ δευτέρα λύσις τοῦ προβλήματος. Δύο δὲ ἄλλαι ἀκόμη λαμβάνονται ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ κέντρον Δ ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι, ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς μέσης παραλλήλου.

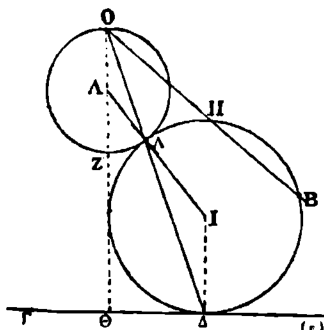
1459α. Σημείωσις. Αἱ περιφέρειαι, αἵτινες ἐφάπτονται δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἐσωτερικῶς αὐτῆς, ὑπῆρξαν ἀντικείμενον ἐνδιαφερουσῶν μελετῶν. (*J. M. E.*, 1893, σ. 196. H. Verrière).

Πρόβλημα 470

1460. **Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Β καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας (Α) καὶ δοθείσης εὐθείας (ε).**

Ἔστω (Ι) ἡ περιφέρεια αὕτη. Ἡ διάκεντρος ΑΙ τῶν δύο περιφερειῶν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς αὐτῶν Λ.

Διὰ τοῦ κέντρου Α, φέρομεν τὴν ΟΑΘ κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) καὶ τὰς ΟΗΒ, ΛΖ. Ἔστω Δ δὲ ἡ τομὴ τῆς περιφερείας (Ι) καὶ τῆς ΟΛ.



Σχ. 929.

Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΑΛ καὶ ΛΙΔ ἔχουν τὰς γωνίας εἰς τὸ Λ ἴσας· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν εἰς Ο καὶ Δ εἶναι ἴσαι καί, ἑπομένως, ἡ ΙΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΟΑ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν (ε). Εἶναι κατὰ συνέπειαν τὸ Δ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς περιφερείας (Ι) καὶ τῆς (ε).

Ἐπειδὴ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΟΛΖ εἶναι ὀρθή, τὸ τετράπλευρον ΛΖΘΔ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ ἑπομένως

$$ΟΘ \,.\, ΟΖ = ΟΛ \,.\, ΟΔ = ΟΒ \,.\, ΟΗ,$$

ἢ $ΟΗ = \dfrac{ΟΘ \,.\, ΟΖ}{ΟΒ}$, ποσ. γνωστή.

Κατασκευάζεται ἑπομένως τὸ μῆκος ΟΗ, ἄρα καὶ τὸ σημεῖον Η καὶ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τό:

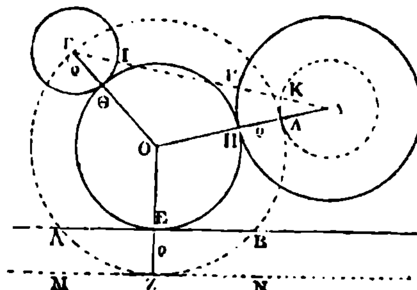
Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων, Β καὶ Η, καὶ ἐφαπτομένη εὐθείας (ε).

Ὡς γνωστόν, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχεται δύο, ἐν γένει, λύσεις.

Παρατήρησις. Τὸ τμῆμα ΟΗ δύναται νὰ ληφθῇ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΟ. Κατὰ συνέπειαν, αἱ λύσεις θὰ εἶναι, ἐν γένει, τέσσαρες.

Πρόβλημα 471

1461. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν (Γ) καὶ (Δ).*



Σχ. 930.

Ἔστω ΕΘΗ ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Φέρομεν τὰς ΟΓ, ΟΔ, ΓΔ καὶ τὴν κάθετον ΟΖ ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν μικροτέραν τῶν ἀποστάσεων ΟΓ καὶ ΟΔ, γράφομεν περιφέρειαν ΓΖΛ, μὲ κέντρον δὲ Δ καὶ ἀκτῖνα ΔΛ γράφομεν ἄλλην, ἐφαπτομένην τῆς πρώτης.

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια ΓΖΛ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (Δ, ΔΛ) καὶ τῆς εὐθείας ΜΝ, παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν $ρ = ΓΘ$ ἀπ' αὐτῆς, εἶναι κατασκευάσιμος (§ 1460). Τὸ κέντρον αὐτῆς Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ διὰ τοῦ σημείου Γ διέρχονται τέσσαρες ἐν γένει περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι τῆς ΜΝ καὶ τῆς βοηθητικῆς περιφερείας (ΔΛ), τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ τέσσαρες ἐπίσης, ἐν γένει, λύσεις.

Πρόβλημα 472

***1462.* Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Γ καὶ ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν (Α) καὶ (Β).**

Τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὸ ἑπόμενον (§ 1463) ἐλύθησαν ἤδη (§§ 46 καὶ 47). Θεωροῦμεν ἐν τούτοις ὠφέλιμον νὰ ἐπανέλθωμεν ἐπ' αὐτῶν.

Ἔστω ΓΔΜΝ ἡ ζητουμένη περιφέρεια.

Ἡ εὐθεῖα ΜΝ τῶν σημείων ἐπαφῆς διέρχεται διὰ τοῦ ἐξωτερικοῦ κέντρου ὁμοιότητος Σ τῶν περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), ὁριζομένου διὰ τῆς τομῆς τῆς διακέντρου ΑΒ μετὰ μιᾶς τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων, ΕΖ.

Σχ. 831.

Ἡ δὲ περιφέρεια, ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Γ, Ε καὶ Ζ, τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΣΓ εἰς σημεῖον Δ, ἀνῆκον εἰς τὴν ζητουμένην περιφέρειαν (Ο). Ἐπειδὴ

$$ΣΓ \,.\, ΣΔ = ΣΜ \,.\, ΣΝ = ΣΕ \,.\, ΣΖ.$$

Τὸ πρόβλημα, ἑπομένως, ἀνάγεται εἰς τὸ γνωστόν: Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων, Γ καὶ Δ, καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας (Β).

Γνωρίζομεν ὅτι θὰ πρέπει νὰ γράψωμεν περιφέρειαν διὰ τῶν Γ, Δ, τέμνουσαν τὴν (Β) εἰς Η καὶ Θ λ. χ. καὶ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Λ τῆς ΗΘ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην ΛΝ πρὸς τὴν περιφέρειαν (Β). Ἡ διὰ τῶν τριῶν σημείων Γ, Δ καὶ Ν διερχομένη περιφέρεια εἶναι ἡ ζητουμένη.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Μ ὁρίζεται καὶ ἀπ' εὐθείας, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται.

Αἱ ἐφαπτόμεναι ΛΤ, ΙΚ ὁρίζουν δευτέραν περιφέρειαν ΓΔΚΤ, λύσιν ἐπίσης τοῦ προβλήματος.

Διὰ θεωρήσεως καὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ κέντρου ὁμοιότητος τῶν περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), αἱ λύσεις ἀνέρχονται, ἐν γένει, εἰς τέσσαρας.

Πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου 473.

1463. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν (Α), (Β), (Γ).

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 46).

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται ὀκτὼ ἐν γένει λύσεις. Ἐὰν αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι εἶναι ἐξωτερικαὶ ἀλλήλων, αἱ λαμβανόμεναι περιφέρειαι εἶναι *συζυγεῖς* ἀνὰ δύο. Λ. χ. εἰς τὴν περιφέρειαν τὴν ἐφαπτομένην ἐξωτερικῶς τῶν τριῶν περιφερειῶν, ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐσωτερικῶς ἐφαπτομένη αὐτῶν· εἰς δὲ τὴν ἐφαπτομένην ἐξωτερικῶς τῶν (Α), (Β) καὶ ἐσωτερικῶς τῆς (Γ), ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐσωτερικῶς ἐφαπτομένη τῶν δύο πρώτων καὶ ἐξωτερικῶς τῆς τρίτης κλπ.

1463 α. Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐπεξειργάσθη ὁ Ἀπολλώνιος εἰς ἓν ἔργον αὐτοῦ, καὶ τοῦ ὁποίου μόνον ὁ τίτλος περιεσώθη εἰς ἡμᾶς διὰ τοῦ Πάππου. Ὁ Adrianus Romanus (1561 - 1615) διεπίστωσεν ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ διὰ τῆς τομῆς δύο ὑπερβολῶν καί, ὀλίγον ἀργότερον, ὁ Viète ἔδωσε τὴν λύσιν, τὴν ὁποίαν παρεθέσαμεν εἰς τὴν § 46. Ὁ δὲ Newton ἀπέδειξεν ὅτι ἡ λύσις ἐπιτυγχάνεται καὶ ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν ὑπερβολῶν τοῦ Romanus. Τοῦ ἰδίου προβλήματος ἐπελήφθησαν καὶ οἱ Descantes, Euler, Poncelet, ὡς καὶ πολλοὶ ἄλλοι γεωμέτραι, μεταξὺ τῶν ὁποίων οἱ Gergonne καὶ Bobillier ἔδωσαν τὴν ὡραίαν λύσιν τὴν ὁποίαν εὑρίσκει τις εἰς τὰς πρώτας ἐκδόσεις τοῦ *Traité de Géométrie* τῶν Rouché καὶ Comberousse. Καὶ τελευταίως, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐξακολουθεῖ νὰ ἀπασχολῇ τοὺς ἐρευνητάς· οὕτω συνεσχετίσθη πρὸς τὸ γενικώτερον, τῆς κατασκευῆς περιφερείας τεμνούσης κατὰ ὡρισμένας γωνίας τρεῖς δοθείσας περιφερείας (N. A., 1883, σ. 272, 348· 1884, σ. 316· 1886· σ. 539· 1891, σ. 339· 1892, σ. 227 καὶ 331). Κατ' ἐπέκτασιν δὲ αὐτοῦ, ἀγόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν περιφερείας ἐφαπτομένης τριῶν ἄλλων κειμένων ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ὡς καὶ σφαίρας ἐφαπτομένης τεσσάρων δοθεισῶν σφαιρῶν (N. A., 1892, σ. 406 καὶ 410).

Ὁ Emile Lemoine εἰς N. A. 1892, σ. 453, συγκρίνει τὰς διαφόρους λύσεις τοῦ προβλήματος τοῦ Ἀπολλωνίου ἀπὸ ἀπόψεως ἁπλότητος καὶ ἀκριβείας κατασκευῶν. Τοποθετεῖ εἰς τὴν πρώτην θέσιν τὴν λύσιν τοῦ Mannheim (N. A., 1885, σ. 108), μετὰ τὴν ὁποίαν κατατάσσει τὰς λύσεις τῶν Viète καὶ Fouché (1892, σ. 227) καὶ τελευταίαν θέτει τὴν λύσιν τῶν Gergonne καὶ Bobillier, ἀπὸ ἀπόψεως εὐκόλων γραφικῶν κατασκευῶν, μολονότι τόσον κομψήν.

Ἡ λύσις τοῦ Fouché δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς ἐκείνης τοῦ Poncelet εἰς τὸ *Traité des prop. proj. des figures* αὐτοῦ (σ. 139, σχ. 30). Ἡ παρατήρησις αὕτη ἔγινε ὑπὸ τοῦ G. de Longchamps (B. d. Sc. M.) 1898 - 99, σ. 81) καὶ ὁ ὁποῖος προσθέτει ὅτι ἡ λύσις τοῦ Poncelet εἶναι ἀσυγκρίτως ἀνωτέρα τῆς τοῦ Gergonne. Εἰς τὰς *Applications d'Analyse et de Géométrie* τοῦ Poncelet παρατίθενται καὶ πολλαὶ ἄλλαι λύσεις τοῦ προβλήματος (τόμ. I, σ. 29 καὶ 444).

Ἡ λύσις τοῦ Pouché εὐκόλως προσφέρεται δι' ἁπλῆν καὶ πλήρη διερεύνησιν ἐπὶ τῆς πραγματικότητος τῶν λύσεων καὶ τῆς φύσεως τῶν ἐπαφῶν (Βλ. *Géom.* τῶν Rouché — Comberousse, 7η ἐκδ., σ. 297). Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν λύσιν τοῦ Mannheim (N. A., 1903, σ. 49).

Ἐσχάτως, ὁ R. Bricard ἐπεξειργάσθη τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου χρησιμοποιῶν τοὺς κύκλους τοῦ Laguerre (N. A., 1907, σ. 491).

Πρόβλημα 473—1

1463β. Νὰ κατασκευασθοῦν τρεῖς περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων καὶ τοιαῦται, ὥστε

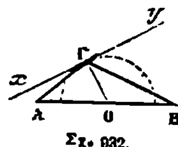
1) Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς μιᾶς τούτων μετὰ τῶν δύο ἄλλων νὰ εἶναι δοθέντα,

καὶ 2) Αἱ δύο τελευταῖαι περιφέρειαι νὰ ἐφάπτωνται δοθείσης εὐθείας. (Annales de Gergonne, τόμ. V, 1814 — 1815, σ. 92).

Ἡ λύσις δίδεται εἰς τὴν αὐτὴν συλλογήν, σ. 295, ὑπὸ τοῦ J.-B. Durrande, ἡλικίας τότε δέκα ἑπτὰ ἐτῶν καὶ ἔχοντος σπουδάσει τὰ Μαθηματικὰ ἐκ μόνον τῶν βιβλίων. (Σημ. τοῦ G.-D. Gergonne).

Πρόβλημα 474

1464. Δίδονται δύο σημεῖα Α, Β καὶ εὐθεῖα xy. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖον Γ, ἔχον ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν Α καὶ Β μὲ ἄθροισμα τετραγώνων ἐλάχιστον.

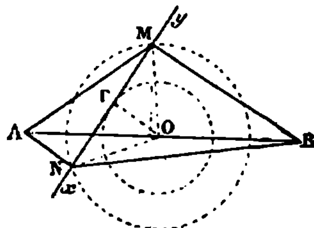


Σχ. 932.

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι δοθέν, εἶναι περιφέρεια (Ο) μὲ κέντρον τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΑΒ.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἐὰν ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια ληφθῇ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἐφάπτεται τῆς δοθείσης εὐθείας xy, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μετ' αὐτῆς θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον τοῦ ἐλαχίστου ἀθροίσματος.

Εἶναι, ἐπομένως, τὸ σημεῖον Γ ὁ πούς τῆς ἐκ τοῦ Ο καθέτου ἐπὶ τὴν xy.



Σχ. 932.

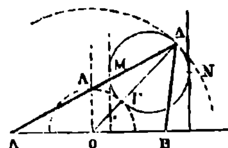
Παρατήρησις. Ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας (Ο) διὰ δοθεῖσαν τιμὴν k^2 τοῦ ἐν λόγῳ ἀθροίσματος εἶναι

$$\rho = \sqrt{\frac{k^2}{2} - (AO)^2}.$$

Ὅπως εἰς ὅλα τὰ προβλήματα δευτέρου βαθμοῦ, καὶ τὸ ἀνωτέρω ἐπιδέχεται δύο, μίαν ἢ καμμίαν λύσιν, ἐὰν ἡ περιφέρεια (Ο) τέμνῃ τὴν xy, ἐφάπτεται ἢ εἶναι ἐξωτερικὴ αὐτῆς, ἀντιστοίχως.

Πρόβλημα 474—I

1465. Δίδονται δύο σημεία Α, Β καὶ περιφέρεια (ΓΔ). Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΒΔ^2$ νὰ εἶναι τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον.



Σχ. 934.

Ἑνοῦμεν τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΑΒ μετὰ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας. Τὸ σημεῖον Γ εἶναι τὸ σημεῖον ἐλαχίστου ἀθροίσματος καὶ τὸ Δ τὸ τοῦ μεγίστου.

1466. Τὰ αὐτὰ δεδομένα. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς (ΓΔ) σημεῖον Μ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ διαφορὰ $ΜΑ^2 - ΜΒ^2$ νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη.

Θὰ πρέπει νὰ φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας.

1) Ἐὰν ἡ κάθετος ΟΛ δὲν συναντᾷ τὴν περιφέρειαν, τὸ σημεῖον Μ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον καὶ τὸ Ν εἰς τὸ ἐλάχιστον τῆς διαφορᾶς.

2) Ἐὰν ἡ ΟΛ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν, ἑκάστη ἐφαπτομένη δίδει ἓν (σχετικὸν) ἐλάχιστον, ἡ δὲ διαφορὰ αὐξάνει ἐφ' ὅσον τὸ σημεῖον Μ πλησιάζει πρὸς τὴν ΟΛ.

Διὰ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ΟΛ καὶ τῆς περιφερείας, ἡ διαφορὰ εἶναι μηδέν.

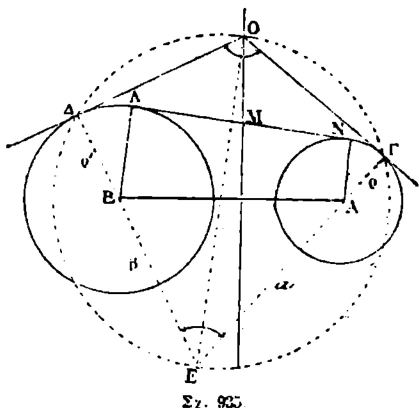
Πρόβλημα 475

1467. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν δοθέντος τριγώνου τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

(*Μέθοδοι*, § 358).

Πρόβλημα 475—I

1468. Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐξ οὗ δύο τῶν πρὸς αὐτὰς ἐφαπτομένων νὰ εἶναι ἴσαι καὶ νὰ τέμνωνται κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν.



Σχ. 935

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τοῦτο. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΑΓ, ΒΔ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, προεκτείνομεν αὐτὰς μέχρι τῆς τομῆς των Ε καὶ φέρομεν τὴν ΟΕ.

Τὸ τετράπλευρον ΟΓΕΔ ἔχει τὰς γωνίας Γ καὶ Δ ὀρθὰς καὶ ἑπομένως τὰς Ο καὶ Ε παραπληρωματικάς, τὰ δὲ τρίγωνα ΟΔΕ καὶ ΟΓΕ εἶναι

ἴσα, ὡς ἔχοντα κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ΟΔ = ΟΓ. Εἶναι ἄρα ΕΓ = ΕΔ ἤ

$$\alpha + \rho = \beta + \rho' \quad \text{καὶ} \quad \alpha - \beta = \rho' - \rho, \text{ ποσότης γνωστή.}$$

Κατὰ συνέπειαν, τὸ τρίγωνον ΑΒΕ κατασκευάζεται, ἐπειδὴ εἶναι γνωστὴ ἡ βάσις του ΑΒ, ἡ ἀπέναντι γωνία Ε (παραπληρωματικὴ τῆς Ο) καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του, $\alpha - \beta = \rho' - \rho$ (§ 989).

Ὁρισθέντος τοῦ σημείου Ε, ὁρίζονται καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Γ, Δ, ἄρα καὶ τὸ ζητούμενον σημεῖον Ο.

Πρόβλημα 476

1469. **Ἐπὶ βάσεως δοθείσης ΕΕ′, κατασκευάζομεν τρίγωνα ΕΜΕ′, ἔχοντα ἄθροισμα τῶν ΜΕ καὶ ΜΕ′ δοθὲν μῆκος λ. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς ΜΕ καὶ ΜΕ′;**

Ἡ περιβάλλουσα ἔχει προφανῶς ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν ΕΕ′. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ τυχὸν τρίγωνον ΕΜΕ′, ἐκ τῶν θεωρουμένων, καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ πρὸς τὴν κάθετον (ε) εἰς τὸ μέσον Ο τῆς ΕΕ′ εἶναι ἐπίσης τρίγωνον μὲ τὰς αὐτὰς ἰδιότητας πρὸς

Σχ. 936.

τὰς τοῦ ΕΜΕ′, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ περιβάλλουσα αὕτη θὰ ἔχῃ καὶ ὡς δεύτερον ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ σημεῖον Ο ὡς κέντρον συμμετρίας.

Ἀγόμεθα οὕτω νὰ ἑνώσωμεν τὸ κέντρον Ο μετὰ τῶν Γ καὶ Δ καὶ νὰ θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα Η καὶ Θ, τομὰς τῶν ΟΓ, ΟΔ μετὰ τῶν περιφερειῶν (ΜΕ′) καὶ (ΜΕ). Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΟΔΜΓ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ

$$ΟΗ = ΟΓ + ΓΗ = ΟΓ + ΓΜ = ΟΔ + ΔΜ = ΟΔ + ΔΘ = ΟΘ,$$

γίνεται πρόδηλον ὅτι ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα τὸ σταθερὸν ἄθροισμα

$$ΜΓ + ΜΔ = \frac{\lambda}{2}.$$

1470. *Παρατηρήσεις.* 1) *Τὰ σημεῖα* Θ, Μ, Η *κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.*

2) *Τὰ σημεῖα* Μ, Θ′, Η′ *κεῖνται ἐπίσης ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.*

Πρόβλημα 477

1471. Μὲ κέντρα δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β γράφομεν ζεύγη μεταβλητῶν περιφερειῶν, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες α, β συνδέονται, εἰς ἕκαστον ζεῦγος, διὰ τῆς σχέσεως

$$\alpha\nu + \beta\mu = k^2.$$

ὅπου μ, ν, k δοθέντα μήκη. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῶν κοινῶν (ἐξωτερικῶν) ἐφαπτομένων τῶν περιφερειῶν αὐτῶν; (N. A., 1851, σ. 340).

Σχ. 937.

Ἂς διαιρέσωμεν τὴν ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν μ καὶ ν, δηλ. τοιαῦτα ὥστε:

$$\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\mu}{\nu}$$

καὶ ἔστω ΔΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΕΓ. Εἰς τὸ τραπέζιον ΑΒΓΕ θὰ ἔχωμεν (§ 1200).

$$\Delta Z = \delta = \frac{\alpha\nu + \beta\mu}{\mu + \nu} = \frac{k^2}{\mu + \nu}, \text{ σταθ. ποσότης.}$$

Ἡ ζητουμένη, κατὰ συνέπειαν, περιβάλλουσα εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα τὸ σταθερὸν μῆκος δ ([85]).

Εὐθεῖαι καὶ περιφέρειαι τεμνόμεναι

Πρόβλημα 478

1472. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα κέντρον δοθὲν σημεῖον Γ καὶ τέμνουσα τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας Ο εἰς τρόπον, ὥστε μία τῶν

Σχ. 938.

ὁριζομένων χορδῶν ΑΒ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy.

---

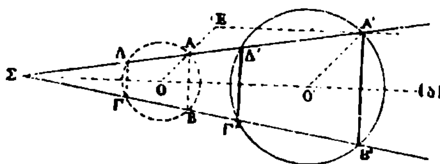
85. Σημ. μετ. Ἡ ἐπέκτασις καὶ διὰ τὰς (δυνατὰς) ἐσωτερικὰς κοινὰς ἐφαπτομένας εἶναι ἄμεσος.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον, εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι τὸ μέσον Δ τῆς χορδῆς ΑΒ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ἐκ τοῦ Γ καθέτου ἐπὶ τὴν xy καὶ τῆς διαμέσου ΟΘ τοῦ τριγώνου ΕΟΖ τοῦ σχήματος.

Πρόβλημα 478—I

1473. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ τέμνουσα τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον νὰ εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές, ἔχον τὰς βάσεις αὐτοῦ κατὰ λόγον δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$.

Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διχοτόμου (δ) τῆς γωνίας, αἱ δὲ βάσεις θὰ εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτήν.

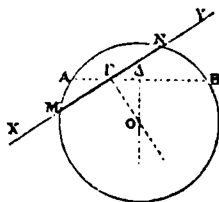


Σχ. 939

Ὁδηγούμενοι ὑπὸ τῆς ὁμοιότητος, φέρομεν δύο καθέτους ΑΒ, ΓΔ ἐπὶ τὴν διχοτόμον (δ), τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν μηκῶν νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$. Περιγράφομεν ἀκολούθως περιφέρειαν (Ο) εἰς τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ καὶ ἐπὶ τῆς ΟΑ λαμβάνομεν τμῆμα ΟΕ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα. Ἡ κορυφὴ Ο' τοῦ παραλληλογράμμου ΟΕΑ'Ο' εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Πρόβλημα 478—II

1474. Δίδονται εὐθεῖα ΧΥ καὶ δύο σημεῖα Α, Β ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διὰ τῶν Α καὶ Β, ἀποτέμνουσα ἐπὶ τῆς ΧΥ τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν χορδήν.



Σχ. 940

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας καὶ Γ ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΧΥ καὶ τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν, ἡ ἐλαχίστη χορδὴ ἥτις διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Γ, ἐσωτερικοῦ αὐτῆς, εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ σημείου Γ ἀκτῖνα, τὸ κέντρον Ο θὰ πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου ΓΟ ἐπὶ τὴν ΧΥ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ πρέπει νὰ εἶναι καὶ σημεῖον τῆς καθέτου ΔΟ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν τούτων, ΓΟ καὶ ΔΟ.

Πρόβλημα 479

1475. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων Α, Β καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν (Γ) κατὰ διάμετρον.

Ἔστω ΖΕ ἡ διάμετρος αὕτη καὶ ΑΓΔ ἡ διὰ τοῦ κέντρου Γ χορδὴ τῆς ζητουμένης περιφερείας. Ἐπειδὴ

$$ΑΓ \,.\, ΓΔ = ΓΕ \,.\, ΓΖ = ρ^2,$$

ἢ

$$ΓΔ = \frac{ρ^2}{ΑΓ} = k,$$

τὸ μῆκος ΓΔ κατασκευάζεται, ὡς τρίτη ἀνάλογος γνωστῶν μηκῶν. Ὁρίζεται ἑπομένως τὸ σημεῖον Δ καὶ ἡ ζητουμένη περιφέρεια εἶναι ἡ διὰ τῶν Α, Β, Δ γραφομένη.

Σχ. 941.

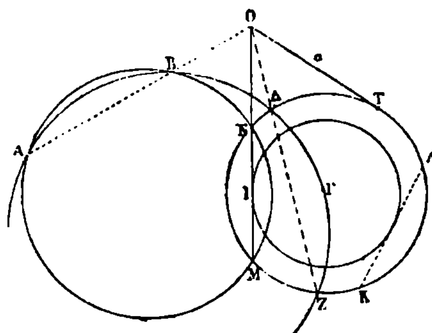
Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ σημείου Δ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, ἔχουσαν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ, διερχομένην διὰ τοῦ Α καὶ διὰ τοῦ ἄκρου Η τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΓ ἀκτῖνος τῆς περιφερείας (Γ). Πράγματι,

$$ΓΔ = \frac{ΓΗ^2}{ΑΓ} = \frac{ρ^2}{ΑΓ} = k.$$

Πρόβλημα 480

1476. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων Α, Β καὶ τέμνουσα περιφέρειαν δοθεῖσαν (Γ) κατὰ χορδὴν δοθέντος μήκους λ.

1) Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΜΝ $= λ$, ἀγόμεθα



Σχ. 942.

εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΜΝ.

Γράφομεν πρὸς τοῦτο βοηθητικὴν περιφέρειαν ΑΒΔΖ, τέμνουσαν εἰς Δ καὶ Ζ τὴν περιφέρειαν (Γ). Ὡς γνωστόν, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΜΝ καὶ ΖΔ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.

Ἐπειδὴ δέ: $OM . ON = OA . OB = OT^2$ καὶ $OM - ON = \lambda$, τὰ μήκη OM, ON εὑρίσκονται εὐκόλως κατὰ τὴν κατασκευὴν τῆς § 298.

2) Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ εὕρωμεν χορδὴν ΚΛ τῆς περιφερείας (Γ) μήκους λ, νὰ γράψωμεν περιφέρειαν ὁμόκεντρον καὶ ἐφαπτομένην αὐτῆς καὶ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ O ἐφαπτομένην ONM πρὸς τὴν δευτέραν ταύτην περιφέρειαν. Ἡ περιφέρεια ἥτις διέρχεται διὰ τῶν τεσσάρων σημείων A, B, M, N (ἀφοῦ $OA.OB = OM.ON$), πληροῖ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 481

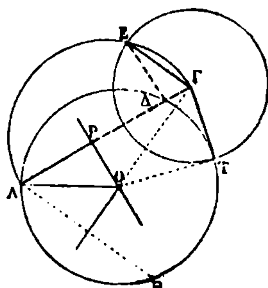
1477. Δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διὰ τῶν A καὶ B τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐκ τοῦ Γ πρὸς αὐτὴν ἐφαπτόμεναι νὰ ἔχουν μῆκος δοθὲν λ.

Ἔστω (O) ἡ ζητουμένη περιφέρεια καὶ ΓΤ = λ. Ἐπειδὴ

$$\Gamma\Delta . \Gamma A = \Gamma T^2 = \lambda^2,$$

τὸ σημεῖον Δ κατασκευάζεται ἀμέσως, κατὰ τὸ σχῆμα, ὡς ποὺς τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΑΓ ὕψους τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΕ καὶ ἔχοντος κάθετον πλευρὰν ΓΕ = λ.

Ἡ περιφέρεια (O) εἶναι ἡ διὰ τῶν τριῶν σημείων A, B, Δ διερχομένη.



Σχ. 943.

Πρόβλημα 481—I

1478. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων A, B καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν ἄλλην (Γ).

Πρόκειται περὶ τοῦ ἰδίου προβλήματος (Σχ. 943), ἀφοῦ τὸ μῆκος τῆς ΓΤ εἶναι γνωστὸν καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας (Γ). Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐπιληφθῶμεν τοῦ προβλήματος τούτου καὶ κατὰ γενικώτερον τρόπον.

Ἂς συνδέσωμεν τὸ κέντρον O τῆς (ζητουμένης) περιφερείας πρὸς τὰ A, Γ, T. Θὰ ἔχωμεν

$$O\Gamma^2 - OT^2 = \Gamma\Lambda^2 = \lambda^2$$

καὶ ἑπομένως $$O\Gamma^2 - OA^2 = \lambda^2.$$

Τὸ κέντρον O θὰ εἶναι, δηλαδή, κοινὸν σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς AB καὶ τῆς καθέτου PO ἐπὶ τὴν ΑΓ - τόπου τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν Γ καὶ A εἶναι ἴση πρὸς λ^2.

Πρόβλημα 481—II

1479. Νὰ γραφῇ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐκ τριῶν δοθέντων σημείων A, B, Γ, ἀγόμεναι πρὸς αὐτὴν ἐφαπτόμεναι νὰ ἔχουν δοθέντα μήκη α, β, γ.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν περιφερείας τεμ-

νούσης ὀρθογωνίως τρεῖς ἄλλας δοθείσας (Α, α), (Β,β) καὶ (Γ, γ). Τὸ κέντρον αὐτῆς εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ριζικῶν ἀξόνων τῶν περιφερειῶν τούτων, ἀνὰ δύο λαμβανομένων.

Πρόβλημα 481—III

1480. **Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας.**

Εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

Πρόβλημα 482

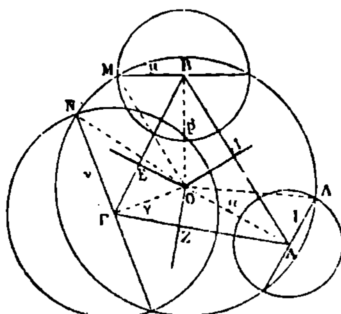
1481. **Νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως τρεῖς ἄλλας δοθείσας.**

Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι τὸ *ριζικὸν κέντρον* τῶν τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν, ἐπειδὴ αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι πρὸς τὰς τρεῖς περιφερείας εἶναι ἴσαι. Τὸ κοινὸν μῆκος των εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης περιφερείας (§ 1404 α).

Πρόβλημα 483

1482. **Νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα τρεῖς ἄλλας δοθείσας κατὰ διαμέτρους.**

Ὅταν μία περιφέρεια (Ο) τέμνῃ δύο ἄλλας (Α) καὶ (Β) κατὰ διαμέτρους, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ εὐθείας ΔΟ καθέτου ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΑΒ - τόπου τῶν σημείων δι' ἃ (Σχ. 944):



Σχ. 944

$$OA^2 - OB^2 = \alpha^2 - \beta^2 = \mu^2 - \lambda^2. \quad (1)$$

Ὁμοίως τὸ σημεῖον Ο θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΕ, διὰ τὰ σημεῖα τῆς ὁποίας συμβαίνει

$$\beta^2 - \gamma^2 = \nu^2 - \mu^2. \quad (2)$$

Ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ΔΟ, ΕΟ ὁρίζει τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Ἡ ἀκτὶς αὐτῆς εἶναι

$$OA = \sqrt{\alpha^2 + \lambda^2} = OM = ON.$$

1483. *Παρατήρησις. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι* ΟΔ, ΟΕ *καὶ ἡ κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁριζομένη* ΟΖ, *τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.* Ἐκ τῶν σχέσεων πράγματι

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mu^2 - \lambda^2$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = \nu^2 - \mu^2$$

καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ἕπεται ἡ

$$\alpha^2 - \gamma^2 = \nu^2 - \lambda^2. \quad (3)$$

Δηλ. τὸ σημεῖον Ο ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν ΖΟ.

Πρόβλημα 483—I

1484. Διὰ δύο δοθέντων σημείων Β καὶ Γ, νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα δοθεῖσαν (Α) κατὰ διάμετρον.

Οἱ τόποι ΔΟ καὶ ΖΟ ὁρίζονται διὰ τῶν σχέσεων (Σχ. 944):

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\lambda^2 \quad (1') \qquad \text{ἢ} \quad \beta^2 - \alpha^2 = \lambda^2$$

$$\alpha^2 - \gamma^2 = -\lambda^2 \quad (3') \qquad \text{ἢ} \quad \gamma^2 - \alpha^2 = \lambda^2.$$

Ἀρκεῖ, ἄλλωστε, ἡ κατασκευὴ τῆς μιᾶς ἐκ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν. Ἐπειδὴ τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας θὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ.

Πρόβλημα 483—II

1485. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Γ καὶ τέμνουσα δύο δοθείσας περιφερείας (Α) καὶ (Β) κατὰ διαμέτρους.

Οἱ τόποι ΔΟ, ΕΟ, ΖΟ (Σχ. 944), ὁρίζονται ὑπὸ τῶν σχέσεων:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mu^2 - \lambda^2,$$

$$\gamma^2 - \beta^2 = \mu^2,$$

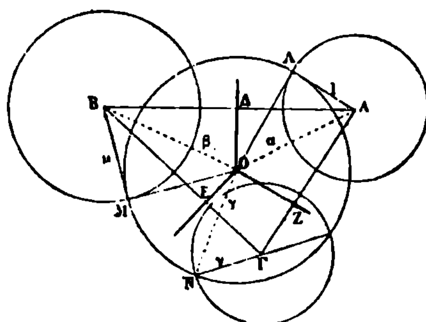
$$\gamma^2 - \alpha^2 = \lambda^2,$$

ἀντιστοίχως.

Ἀρκεῖ ἡ κατασκευὴ δύο τυχουσῶν ἐκ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

Πρόβλημα 483—III

1486. Νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως δύο περιφερείας (Α) καὶ (Β) καὶ κατὰ διάμετρον τρίτην (Γ).



Σχ. 945.

Διὰ τὰς περιφερείας (Α) καὶ (Β), ὁ τόπος ΔΟ εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν περιφερειῶν τούτων. Διὰ τὰς (Α) καὶ (Γ), (Β) καὶ (Γ) οἱ τόποι εἶναι γνωστοὶ (§§ 1401 καὶ 1482). Οἱ τρεῖς τόποι (ΔΟ, ΕΟ, ΖΟ) ὁρίζονται διὰ τῶν σχέσεων

$$\beta^2 - \alpha^2 = \mu^2 - \lambda^2,$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = \mu^2 + \nu^2,$$

$$\alpha^2 - \gamma^2 = \nu^2 + \lambda^2.$$

Ἀρκεῖ ἡ κατασκευὴ δύο ἐκ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.
Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὰ ἀκόλουθα προβλήματα:

Πρόβλημα 483—IV

1487. 1) Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ σημείου Α, τέμνουσα ὀρθογωνίως περιφέρειαν (Β) καὶ κατὰ διάμετρον ἄλλην (Γ).

2) Ἤ, τέμνουσα ὀρθογωνίως περιφέρειαν (Α) καὶ δύο ἄλλας (Β) καὶ (Γ), κατὰ διαμέτρους.

Πρόβλημα 484

1488. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων Α, Β καὶ τέμνουσα περιφέρειαν δοθεῖσαν κατὰ ὡρισμένην γωνίαν.

(*Μέθοδοι*, § 228).

Πρόβλημα 484—I

1488 α. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια φαινομένη ἐκ τῶν σημείων Α, Β, Γ ὑπὸ γωνίας α, β, γ, ἀντιστοίχως.

Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι τὸ σημεῖον ἐξ οὗ φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας τρεῖς περιφέρειαι μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου καὶ ἀκτῖνας ἀναλόγους πρὸς τὰς συντεμνούσας τῶν ἡμίσεων τῶν ἀντιστοίχων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀναφέρεται καὶ ὑπὸ τοῦ Catalan εἰς τὰ *Théorèmes et Problèmes* αὐτοῦ (6η ἔκδ., σ. 225, P. XLVI).

Τὸ πρόβλημα τῆς § 881 α εἶναι τὸ *ἐναλλακτὸν* τοῦ ἀνωτέρω. (A. de G., τόμ. XIX, 1828 - 29, σ. 178).

Σχήματα ἐγγεγραμμένα ἢ περιγεγραμμένα

Πρόβλημα 485

1489. Δοθέντος ὀρθογωνίου τριγώνου, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ, ἐξ οὗ αἱ ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ σχηματίζουν μετ' αὐτῶν ὀρθογώνιον πληροῦν μίαν τῶν ἑπομένων συνθηκῶν:

1) Ὁ λόγος τῶν πλευρῶν του νὰ εἶναι δοθεὶς $\frac{\mu}{\nu}$ (*Μέθοδοι*, § 99 γ).

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του δοθὲν τετράγωνον k^2 (*Μέθοδοι*, § 99, δ).

3) Τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν πλευρῶν δοθὲν τετράγωνον λ^2 (*Μέθοδοι*, § 99, ε).

Πρόβλημα 485—I

1490. Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ.

Αἱ δύο πρῶται κατασκευαὶ ἀναφέρονται εἰς τὴν μέθοδον τοῦ *ἀντιθέτου προβλήματος* (§ 213).

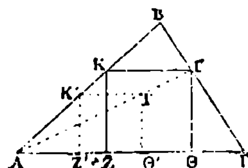
Α'. Κατασκευή (Σχ. 946). Κατασκευάζομεν τετράγωνον τυχὸν Ζ'Θ'Ι'Κ' ἔχον μίαν πλευρὰν Ζ'Θ' ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ μίαν κορυφὴν Κ' ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν ΑΒ. Φέρομεν τὴν ΑΙ'Ι καὶ κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον καὶ προφανῶς τετράγωνον ΘΙΚΖ.

Β'. Κατασκευή (Σχ. 947). Ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΓ τοῦ τριγώνου ἢ ἐπὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν ταύτην, κατασκευάζομεν τετράγωνον ΑΓΕΔ καὶ φέρομεν τὰς ΒΖΔ, ΒΘΕ.
Ἡ ΖΘ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

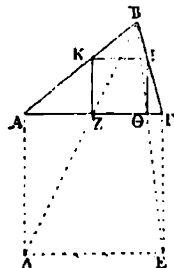
Γ'. Μέθοδος ἀλγεβρική (Σχ. 949). Ἔστω ΑΓ = β, ΒΗ = υ καὶ x ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{ΙΓ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΒΗ}}$$

ἢ $$\frac{x}{\beta} = \frac{\upsilon - x}{\upsilon}$$



Σχ. 946.

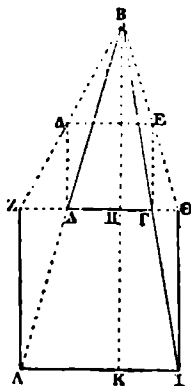


Σχ. 947.

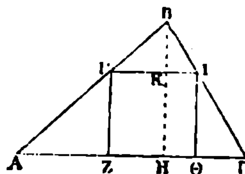
καὶ $$x = \frac{\beta\upsilon}{\beta + \upsilon}.$$

1490 α. *Παρατηρήσεις.* 1) Κατὰ τὴν δευτέραν κατασκευήν, ἐὰν τὸ βοηθητικὸν τετράγωνον ΑΓΕΔ εὑρίσκεται πρὸς ὅ μέρος τῆς πλευρᾶς ΒΓ εὑρίσκεται καὶ τὸ τρίγωνον (Σχ. 948), τὸ λαμβανόμενον τετράγωνον ΖΘΙΛ εἶναι παρεγγεγραμμένον εἰς τὸ τρίγωνον.

Ἐὰν ἡ κορυφὴ Β εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΔΕ, ἐὰν δηλ. υ = β, τὸ παρεγγεγραμμένον τετράγωνον ἀφανίζεται εἰς ἄπειρον· ἐὰν δὲ ἡ κορυφὴ Β εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ βοηθητικοῦ τετραγώνου, τὸ παρεγγεγραμμένον τετράγωνον εὑρίσκεται πρὸς ὅ μέρος τῆς πλευρᾶς ΑΓ εὑρίσκεται καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.



Σχ. 948.



Σχ. 949.

2) Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ παρεγγεγραμμένου τετραγώνου (Σχ. 948), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x}{\beta} = \frac{\upsilon + x}{\upsilon}, \quad x = \frac{\beta\upsilon}{\upsilon - \beta}.$$

Ὁ τύπος οὗτος καταδεικνύει τὰς διαφόρους ἰδιομορφίας ἃς παρουσιάζει τὸ παρεγγεγραμμένον τετράγωνον, ἀναλόγως τῆς σχέσεως τῶν μεγεθῶν τῆς βάσεως καὶ ὕψους τοῦ τριγώνου.

3) Ἂν x καὶ x' εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον τετραγώνου, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{x}=\frac{\beta+\upsilon}{\beta\upsilon},\quad \frac{1}{x'}=\frac{\upsilon-\beta}{\upsilon\beta}\quad \text{ἄρα καὶ}\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{2}{\beta}.$$

Εἶναι δηλ. ἡ βάσις μέση ἁρμονικὴ τῶν πλευρῶν τῶν τετραγώνων τούτων.

4) Ὁ τόπος $$x=\frac{\beta\upsilon}{\beta+\upsilon},$$

τῶν πλευρῶν τῶν ἐγγεγραμμένων τετραγώνων, ἐπιτρέπει τὴν σύγκρισιν πρὸς ἄλληλα τῶν τριῶν τετραγώνων—ἑνὸς ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς—ἅτινα ἐγγράφονται εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον βυ εἶναι σταθερὸν καὶ διὰ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν αὐτοῦ, τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τῶν τριῶν τετραγώνων

$$x_\alpha=\frac{\alpha\upsilon_\alpha=2E}{\alpha+\upsilon_\alpha},\quad x_\beta=\frac{2E}{\beta+\upsilon_\beta},\quad x_\gamma=\frac{2E}{\gamma+\upsilon_\gamma},$$

θὰ ἔχουν τάξιν μεγέθους ἀντίστροφον τῆς τάξεως τῶν μεγεθῶν $\alpha+\upsilon_\alpha$, $\beta+\upsilon_\beta$, $\gamma+\upsilon_\gamma$. Καὶ ἐπειδὴ οἱ δύο προσθετέοι ἑκάστου τῶν ἀθροισμάτων τούτων ἔχουν γινόμενον σταθερόν, τὸ ἄθροισμά των γίνεται μικρότερον ἐφ' ὅσον (§ 344) ἡ διαφορά των ἀπ' ἀλλήλων γίνεται μικροτέρα. Ἐπομένως:

Ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ἐγγραφομένων εἰς τρίγωνον, μέγιστον εἶναι τὸ ἔχον πλευρὰν κειμένην ἐπὶ ἐκείνης τῆς πλευρᾶς, ἀφ' ἧς ἡ διαφορὰ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους εἶναι ἐλαχίστη.

Διὰ $\beta=\upsilon_\beta$, ἡ πλευρὰ τοῦ μεγίστου τετραγώνου εἶναι $\frac{\beta}{2}=\frac{\upsilon}{2}$ καὶ ἡ ἐπιφάνειά του τὸ ἥμισυ τῆς τοῦ τριγώνου.

Τὸ γενικὸν πρόβλημα διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς:

Πρόβλημα 485—II

1490β. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἀνὰ δύο. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, ἔχον δύο κορυφὰς ἐπὶ τῆς μιᾶς αὐτῶν καὶ τὰς δύο ἄλλας ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν.

Ὑπάρχουν ἕξ, ἐν γένει, τοιαῦτα τετράγωνα.

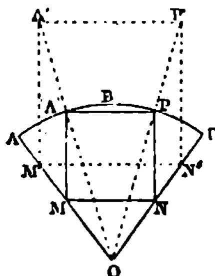
Πρόβλημα 485—III

1490γ. Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα ΟΑΒΓ.

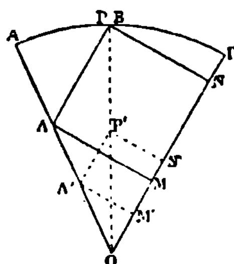
Α'. Κατασκευὴ (Σχ. 950). Ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΓ, ἢ ἐπὶ παραλλήλου πρὸς αὐτὴν Μ'Ν', κατασκευάζομεν τετράγωνον Λ'Μ'Ν'Ρ'. Αἱ ΟΛ, ΟΡ' ὁρίζουν δύο κορυφάς, Λ καὶ Ρ, τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Β'. Κατασκευὴ (Σχ. 951). Ἐὰν μία τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου

τετραγώνου πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀκτίνων, τὸ βοη-



Σχ. 950.



Σχ. 951

θητικὸν τετράγωνον Λ'Μ'Ν'Ρ' μᾶς ὁδηγεῖ ἀμέσως εἰς τὴν ἀντίστοιχον κατασκευήν.

Πρόβλημα 486

1491. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς περιφέρειαν ὀρθογώνιον ὅμοιον δοθέντος ἄλλου.

(*Μέθοδοι*, § 100 γ).

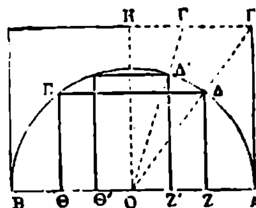
Πρόβλημα 486—I

· *1491 α.* Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον ὀρθογώνιον ὅμοιον δοθέντος ἄλλου.

Ἀνατρέχομεν εἰς τὰ ὅμοια σχήματα ἢ εἰς τοὺς γεωμ. τόπους.

1) Ἔστω $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{μ}{ν}$· φέροντες τὴν ΓΟ, εὑρίσκομεν

$$\frac{ΔΖ}{ΖΘ} = \frac{ΓΑ}{ΑΒ} = \frac{μ}{ν}.$$



Σχ. 952.

2) Ἐὰν ἡ μικροτέρα βάσις τοῦ ὀρθογωνίου πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς διαμέτρου εὑρισκομένη, λαμβάνομεν τὸ τμῆμα ΗΓ' οὕτως, ὥστε

$$\frac{ΟΗ}{2ΗΓ'} = \frac{μ}{ν} \quad ἢ \quad \frac{Ζ'Θ'}{Δ'Ζ'} = \frac{μ}{ν}.$$

Πρόβλημα 486—II

1492. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς περιφέρειαν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν πλευρῶν νὰ εἶναι δοθὲν τετράγωνον k^2.

(*Μέθοδοι*, § 100, ε).

Πρόβλημα 487

1493. Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον δοθείσης περιμέτρου 2 τ.

Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα διὰ πάσας τὰς δυνατὰς τιμὰς τοῦ μήκους τ καὶ νὰ ἐξετασθοῦν αἱ περιπτώσεις

$$\beta < \upsilon_\beta \quad \text{ἢ} \quad \beta = \upsilon_\beta \quad \text{ἢ} \quad \beta > \upsilon_\beta .$$

(*Μέθοδοι*, §§ 190 καὶ 256).

Πρόβλημα 487—Ι

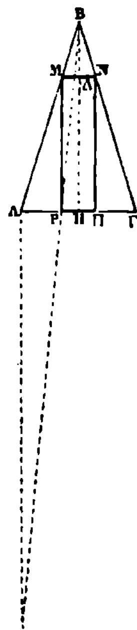
1494. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τρίγωνον ΑΒΓ παραλληλόγραμμον ΜΝΠΡ, ἔχον τὴν πλευρὰν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, τὰς ΜΡ, ΝΠ πλευρὰς παραλλήλους πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν, καί, τοιοῦτον, ὥστε ἡ περίμετρος αὐτοῦ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος 2 λ.

(*Μέθοδοι*, § 192).

Πρόβλημα 488

1495. Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ἔχον διαγώνιον δοθέντος μήκους. Ἐλάχιστον τοῦ μήκους τούτου;

(*Μέθοδοι*, §§ 193, 195).



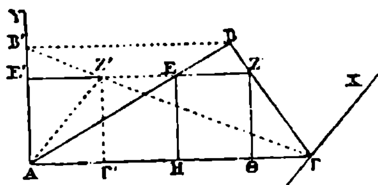
Σχ. 934.

Πρόβλημα 488—Ι

1496. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου μία διαγώνιος νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΓΧ.

Μεταφέρομεν τὴν κορυφὴν Β εἰς Β′, ἐπὶ τῆς καθέτου ΑΥ ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΓ καὶ φέρομεν τὴν Α Ζ′ παράλληλον τῆς ΓΧ.

Τὸ ὀρθογώνιον Ε′Ζ′Θ′Α ὁδηγεῖ ἀμέσως εἰς τό, ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τρίγωνον, ΕΖΘΗ.



Σχ. 933.

Πρόβλημα 488—ΙΙ

1497. Εἰς τὸ τυχὸν τρίγωνον, νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ὅμοιον δοθέντος ἄλλου.

(*Μέθοδος γεωμετρική*, § 209· *Μέθοδος ἀλγεβρική*, § 303, α).

Πρόβλημα 489

1498. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ΡΜΝΠ, ἔχον περίμετρον διπλασίαν τῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΜΒΝ.

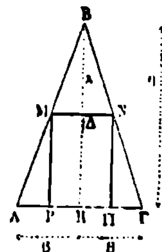
Ἔστω $2(MP + MN) = 2(MN + 2BM)$ (σχ. 954).

Τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν σημείου Μ τοιούτου, ὥστε ἡ κάθετος ΜΡ νὰ εἶναι διπλασία τοῦ τμήματος ΒΜ.

Βοηθούμενοι ὑπὸ τῶν ὁμοίων σχημάτων, ὁδηγούμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς καθέτου ΑΛ, δι τσίας εἰς μῆκος τῆς πλευρᾶς ΒΑ καὶ εἰς τὴν ἀγωγὴν τῆς εὐθ. ; ΒΛ. Ἡ τομὴ αὐτῆς καὶ τῆς βάσεως ΑΓ ὁρίζει τὴν κορυφὴν Ρ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Πρόβλημα 489—I

1499. Ὅμοιον πρόβλημα. Ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΜΒΝ νὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς περιμέτρου τοῦ ὀρθογωνίου.



Σχ. 955.

Ἔστω $A\Gamma = 2\beta$, $\upsilon_\beta = \upsilon$, $AB = \lambda$ καὶ $B\Delta = x$. Εὑρίσκομεν:

$$BM + M\Delta = \frac{2}{3}(MP + 2M\Delta),$$

ἢ

$$\frac{\lambda x}{\upsilon} + \frac{\beta x}{\upsilon} = \frac{2}{3}\left(\upsilon - x + \frac{2\beta x}{\upsilon}\right).$$

Δηλαδὴ

$$x = \frac{2\upsilon^2}{3\lambda + 2\upsilon - \beta},$$

τετάρτη ἀνάλογος γνωστῶν μηκῶν.

Παρατήρησις. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ διὰ λόγον τῶν περιμέτρων τυχόντα.

Πρόβλημα 489—II

1500. Ὁμοίως: Τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων τοῦ μικροτέρου ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου νὰ εἶναι δοθὲν μῆκος μ.

Χρησιμοποιοῦντες τὰς προηγουμένας ἐκφράσεις, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\lambda x}{\upsilon} + \frac{\beta x}{\upsilon} + \upsilon - x + \frac{2\beta x}{\upsilon} = \mu,$$

ἐξ ἧς

$$x = \frac{\upsilon(\mu - \upsilon)}{\lambda + 3\beta - \upsilon}.$$

Πρόβλημα 489—III

1501. Ὁμοίως: Ἡ διαφορὰ τῶν περιμέτρων τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ τριγώνου νὰ εἶναι δοθὲν μῆκος μ.

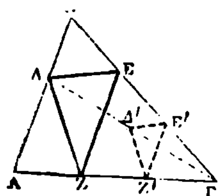
Εὑρίσκομεν

$$x = \frac{\upsilon(\upsilon - \mu)}{\upsilon + \lambda - \beta}.$$

Πρόβλημα 490

1502. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ἄλλο, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς δοθείσας διευθύνσεις. (Paul Serret, Des méthodes en Géométrie).

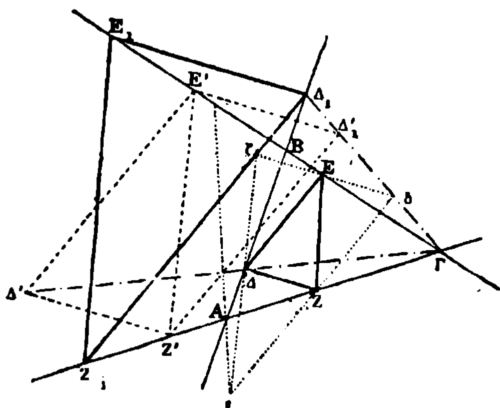
Φέρομεν εὐθεῖαν Ε΄Ζ΄ παράλληλον πρὸς μίαν τῶν δοθεισῶν διευθύνσεων καὶ ἐκ τῶν σημείων Ε΄, Ζ΄, καθ' ἃ αὕτη τέμνει τὰς πλευρὰς ΓΒ καὶ ΓΑ τοῦ τριγώνου, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἄλλας διευθύνσεις, τὰς Ε΄Δ΄ καὶ Ζ΄Δ΄.


Σχ. 956.

Ἐκ τοῦ σημείου Δ καθ' ὃ ἡ ΓΔ΄ τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἄγομεν τὰς ΔΕ καὶ ΔΖ, παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Δ΄Ε΄ καὶ Δ΄Ζ΄. Ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων, τὸ τρίγωνον, ΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον.

1502 α. *Παρατηρήσεις.* 1) Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται καὶ τρεῖς ἄλλας λύσεις.

Πράγματι, ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν Ε΄Ζ΄, παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ, ἐγγεγραμμένην εἰς τὴν γωνίαν Γ καὶ ἐξωτερικὴν τοῦ τριγώνου, καὶ κατόπιν τὰς Ε΄$Δ_1$΄, Ζ΄$Δ_1$΄, παραλλήλους τῶν ΔΖ καὶ ΔΕ ἀντιστοίχως, λαμβάνομεν διὰ τῆς ἰδίας, ὡς προηγουμένως,


Σχ. 957.

κατασκευῆς τρίγωνον $Ε_1Δ_1Ζ_1$, πληροῦν τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος ἀλλὰ *παρεγγεγραμμένον* εἰς τὸ τρίγωνον.

Δύο ἄλλας ὁμοίας *«παρεγγεγραμμένας»* λύσεις θὰ ἐλαμβάνομεν ἐὰν ἐφέρομεν τὴν Δ΄΄Ζ΄΄ ἐγγεγραμμένην εἰς τὴν γωνίαν Α, ἢ τὴν Δ΄΄Ε΄΄ ἐγγεγραμμένην εἰς τὴν γωνίαν Β (μὴ φαινομένας εἰς σχῆμα).

2) Ἐὰν δίδεται τὸ ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ΔΕΖ, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰ τρία παρεγγεγραμμένα τρίγωνα, θεωροῦντες τὸ *ἀντισυμπληρωματικὸν* τρίγωνον δεζ τοῦ ΔΕΖ.

Ἡ δ ὁρίζει τὴν εὐθεῖαν $\Gamma\Delta_1$, ἄρα καὶ τὴν κορυφὴν Δ_1 τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν παρεγγεγραμμένων τριγώνων.

Αἱ δὲ εὐθεῖαι εΑ καὶ ζΒ ἀνὰ μίαν τῶν κορυφῶν τῶν δύο ἄλλων ἀναλόγων τριγώνων.

3) Ἐὰν αἱ δοθεῖσαι διευθύνσεις εἶναι αἱ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ἐγγεγραμμένον τρίγωνον εἶναι τὸ *μέσον* τρίγωνον ἢ *συμπληρωματικὸν* τοῦ ΑΒΓ (§ 432, Παρατήρησις).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καὶ ἀπὸ γεωμετρικῆς ἀπόψεως δὲν ὁρίζονται τὰ παρεγγεγραμμένα τρίγωνα. Ἐπειδὴ τότε τὰ σημεῖα Γ καὶ δ συμπίπτουν.

Πρόβλημα 490—I

1502 β. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἄλλο δεζ, ἴσον πρὸς δοθὲν ΔΕΖ.

Ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἀντίθετον πρόβλημα. (*Μέθοδοι*, § 215).

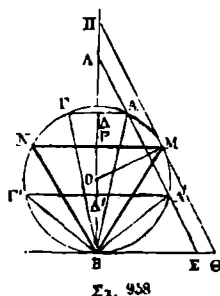
Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐκτίθεται εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον τῶν *Principia mathematica philosophiae naturalis* τοῦ Νεύτωνος (Ivan Alexandroff : ***Problèmes de Géométrie élémentaire, groupés d'après les Méthodes employées pour leur résolution***, σ. 83, 84, n° 425).

Πρόβλημα 491

1503. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν νὰ ἐγγραφῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ ἄθροισμα λ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα.

(α) *Κατασκευή*. Γνωρίζομεν (§ 211) ὅτι θὰ πρέπει νὰ λάβωμεν $BE = \frac{\lambda}{2}$, $B\Lambda = \lambda$ καὶ νὰ φέρωμεν τὴν ΕΛ.



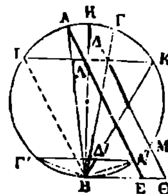
Σχ. 958

Ὑπάρχουν δύο λύσεις, ΒΑΓ, ΒΑ'Γ'.

Ἡ διερεύνησις τοῦ προβλήματος γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς παραλλήλου μετατοπίσεως τῆς εὐθείας ΕΛ.

(β) *Μέγιστον τοῦ μήκους λ*. Τοῦτο παρέχεται διὰ τῆς ἐφαπτομένης ΘΗ. Διὰ τὸν ὑπολογισμόν του, θεωροῦμεν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΡΟΜ καὶ ΒΘΗ.

Ἐπειδὴ
$$\frac{OP}{PM} = \frac{B\Theta}{BH} = \frac{1}{2},$$
θὰ ἔχωμεν
$$OP = \frac{1}{2} PM, \quad PM^2 + \frac{PM^2}{4} = OM^2 = \rho^2,$$
ἄρα καὶ
$$PM = \frac{2\rho}{\sqrt{5}}, \quad OP = \frac{\rho}{\sqrt{5}},$$



Σχ. 959.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΜΗ, εὑρίσκομεν
$$OH \cdot OP = OM^2 \quad \text{ἢ} \quad OH = \frac{OM^2}{OP} = \rho^2 : \frac{\rho}{\sqrt{5}} = \rho\sqrt{5}.$$

Ἑπομένως,

$$BH = \text{μέγιστον τοῦ } \lambda = OH + OB = \rho(\sqrt{5}+1).$$

(γ) Ἔστω $\lambda = 2\rho$ (Σχ. 959).
Μία λύσις ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ σημείου Μ· ἡ ἄλλη, ὑπὸ τοῦ σημείου Η, ἀνάγεται εἰς τὴν (διπλῆν) εὐθεῖαν ΒΗ.

(δ) Ἔστω $B\Lambda = \lambda < 2\rho$. Τὸ σημεῖον Α′ δίδει τὴν λύσιν Α′ΒΓ′ τοῦ προβλήματος:

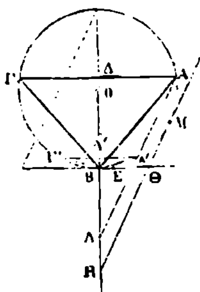
$$A'\Gamma' + B\Delta' = \lambda\cdot$$

διὰ τὸ Α ὅμως εἶναι

$$B\Delta - A\Gamma = B\Delta - \Delta\Lambda = \lambda.$$

Ὥστε: Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΕΛ τέμνῃ τὴν διὰ τοῦ Β διάμετρον τῆς περιφερείας εἰς σημεῖον ἐσωτερικὸν αὐτῆς, $0 < \lambda < 2\rho$, τὸ ἓν τῶν σημείων τομῆς δίδει λύσιν τοῦ τεθέντος προβλήματος, ἐνῷ τὸ ἄλλο ἀντιστοιχεῖ εἰς λύσιν τοῦ ἑπομένου προβλήματος:

1504. Πρόβλημα. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ διαφορὰν τῆς βάσεως ἀπὸ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ἴσην πρὸς δοθὲν μῆκος λ.



Σχ. 960

Τὸ μῆκος λ δύναται νὰ ἔχῃ τυχοῦσαν τιμὴν μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 2ρ.

(ε) $\lambda = 0$.

Διὰ τὸ ἄθροισμα, ἡ λύσις περιορίζεται εἰς τὸ σημεῖον Β. Διὰ τὴν διαφοράν, εὑρίσκομεν τρίγωνον ΒΙΚ (Σχ. 959), τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὕψος.

(ζ) $\lambda < 0$, δηλ. φερόμενον κάτω τοῦ σημείου Β (Σχ. 960).

Λαμβάνομεν πάλιν

$$BE = \frac{1}{2}\lambda, \quad B\Lambda = \lambda.$$

Θὰ ἔχωμεν

$$A'\Gamma' = \Delta'\Lambda,$$

καὶ
$$A'\Gamma' - \Delta'B = B\Lambda = \lambda.$$

Ἐπίσης,
$$A\Gamma - \Delta B = B\Lambda = \lambda.$$

Τὰ δύο, ἐν γένει, ταῦτα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′ΒΓ′, εἶναι λύσεις τοῦ ἀκολούθου προβλήματος:

1504 α. Πρόβλημα. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ διαφορὰν τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς βάσεως αὐτοῦ δοθὲν μῆκος λ.

(η) *Μέγιστον τῆς διαφορᾶς λ.* Τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐφαπτομένην ΜΗ. Καὶ ἐπειδὴ

$$OB = \rho, \quad OH = \rho\sqrt{5},$$

θὰ εἶναι

$$BH = \text{μέγιστον τῆς διαφορᾶς } \lambda = \rho(\sqrt{5}-1).$$

Πρόβλημα 491—Ι

1505. Δίδεται περιφέρεια καὶ ζητεῖται τὰ ἀχθῇ χορδὴ παράλληλος δοθείσης ἐφαπτομένης (ε) καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον, μὲ μίαν βάσιν τὴν χορδὴν ταύτην καὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς κειμένην ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης (ε), νὰ εἶναι τὸ ἔχον δοθεῖσαν περίμετρον.

Ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου τούτου εἶναι διπλασία τοῦ ἀθροίσματος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τοῦ ἔχοντος τὴν ζητουμένην χορδὴν ὡς βάσιν καὶ ὡς κορυφὴν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν χορδὴν ἐφαπτομένης.

Πρόβλημα 492

1506. Δίδονται περιφέρεια καὶ εὐθεῖα XY. Νὰ ἀχθῇ χορδὴ τῆς περιφερείας τοιαύτη, ὥστε τὸ τετράγωνον, τὸ ἔχον ὡς μίαν πλευρὰν τὴν χορδὴν ταύτην, νὰ ἔχῃ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰν κειμένην ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας.

Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα, ὑποθέτοντες μεταβλητὴν τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς εὐθείας.

(*Μέθοδοι*, § 255. Ἐπίσης, Ἀσκ. Ἀλγέβρας ὑπὸ F. G. - M., 4η ἔκδ., n° 1460, σ. 743).

Πρόβλημα 492—Ι

1507. Ἀνάλογον πρόβλημα. Τὸ τετράγωνον ἀντικαθίσταται ὑπὸ ὀρθογωνίου ὁμοίου πρὸς δοθὲν ἄλλο.

Λύσις ἡ αὐτή. Κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς XY ὀρθογώνιον (μ, ν) ὅμοιον τοῦ δοθέντος.

Διερεύνησις. Ἔστω $\mu > \nu$.

Ὑπάρχουν δύο κύριαι περιπτώσεις:

1) Ἐὰν ἡ χορδὴ εἶναι ὁμόλογος τῆς μ πλευρᾶς.

2) Ἐὰν αὕτη εἶναι ὁμόλογος τῆς ν πλευρᾶς.

Ἡ πλήρης διερεύνησις ἑκάστης τῶν περιφερειῶν τούτων γίνεται ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ τετραγώνου.

Πρόβλημα 493

1508. Δίδονται περιφέρεια καὶ εὐθεῖα XY. Νὰ ἀχθῇ χορδὴ τῆς περιφερείας τοιαύτη, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον ὡς μίαν πλευρὰν τὴν χορδὴν ταύτην καὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς κειμένην ἐπὶ τῆς εὐθείας, νὰ ἔχῃ ὡς περίμετρον δοθὲν μῆκος 2 λ.

Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα:

1) Ὅταν ἡ εὐθεῖα XY εἶναι σταθερὰ καὶ μεταβλητὸν τὸ μῆκος 2 λ.

2) Ὅταν τὸ μῆκος 2 λ εἶναι σταθερὸν καὶ μεταβλητὴ ἡ ἀπόστασις τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας.

Σχ. 1001

Τὸ γνωστὸν ἤδη πρόβλημα (§§ 211 καὶ 1503), ὁδηγεῖ ἀμέσως εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν:

Λαμβάνομεν (Σχ. 961) $ΒΕ = \frac{λ}{2}$, $ΒΛ = λ$ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΛ.

Θὰ ἔχωμεν

$$ΑΓ = ΔΛ$$

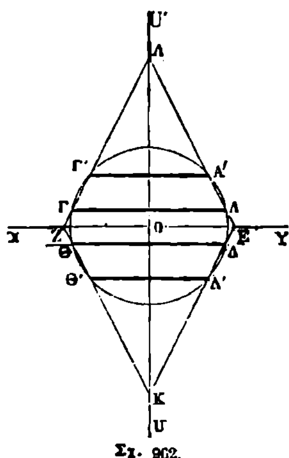
καὶ ἑπομένως

$$ΑΓ + ΒΔ = ΒΛ = λ,$$

ἢ

$$2\,ΑΓ + 2\,ΑΝ = 2\,λ.$$

Διερεύνησις. 1) Δι' ὡρισμένην θέσιν τῆς ΧΥ καὶ μεταβλητὸν λ, ἡ διερεύνησις γίνεται ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Τὸ μέγιστον ΒΗ τοῦ μήκους λ δίδεται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΘΜΗ.



Σχ. 962.

Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀπόστασις ΟΒ, εὑρίσκομεν

$$ΟΗ = ρ\sqrt{5}, \quad ΟΒ = α$$

καὶ

$$ΒΗ = \text{μέγιστον τοῦ } λ = α + ρ\sqrt{5}.$$

2) Ἔστω τώρα λ σταθερὸν καὶ α μεταβλητόν.

Ἡ διερεύνησις δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολίαν. Ἀρκεῖ νὰ ὑποδείξωμεν τὸ μέσον, ὅπως ἀναγνωρίζωνται ἀμέσως αἱ λύσεις τοῦ προβλήματος καὶ ἐκ τῆς ἁπλῆς ὄψεως τοῦ σχήματος, κατὰ τὴν (παράλληλον) μετατόπισιν τῆς εὐθείας ΧΥ.

Λαμβάνοντες

$$ΟΕ = ΟΖ = \frac{1}{2}λ, \quad ΟΛ = ΟΚ = λ,$$

εὑρίσκομεν

$$ΕΖ = λ, \quad ΛΚ = 2\,λ$$

καὶ ἡ μετατόπισις τῆς εὐθείας ΧΥ ἀνάγεται εἰς τὴν ὀλίσθησιν τοῦ ῥόμβου ΕΛΖΚ κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος UU'.

1) *Ὑπάρχουν τόσαι λύσεις ὅσαι καὶ κοιναὶ χορδαὶ τῆς περιφερείας καὶ τοῦ ῥόμβου.* Δηλαδὴ τέσσαρες ἐν γένει.

2) *Ὅταν αἱ πλευραὶ τοῦ ῥόμβου συναντοῦν τὴν περιφέρειαν, τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ ὕψους τοῦ ἀντιστοίχου ὀρθογωνίου εἶναι* λ ἢ $β + υ = λ$.

3) *Ἐὰν αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τοῦ ῥόμβου, αἱ πέραν τῶν κορυφῶν* Λ *καὶ* Κ *αὐτοῦ, συναντοῦν τὴν περιφέρειαν, θὰ ἔχωμεν* $υ - β = λ$.

4) *Ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ διὰ τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν εἰς τὰ* Ε *καὶ* Ζ, *θὰ εἶναι* $β - υ = λ$.

5) *Ἐὰν δύο τῶν πλευρῶν τοῦ ῥόμβου, λ. χ. αἱ* ΕΛ, ΖΛ, *ἀποβοῦν ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας, δύο λύσεις συμπίπτουν εἰς μίαν καὶ διὰ τὴν ἀντίστοιχον, τῆς θέσεως ταύτης, θέσιν τῆς* ΧΥ *τὸ μῆκος λ εἶναι τὸ μέγιστον δυνατόν.*

6) *Αναλόγως τῶν διαφόρων τιμῶν τῶν μηκῶν* α, λ, ρ, *τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τέσσαρας, τρεῖς, δύο, μίαν ἢ καμμίαν λύσιν.*

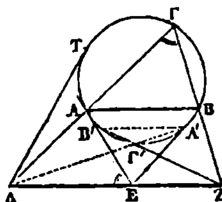
Πρόβλημα 494

1509. Δίδονται περιφέρεια καὶ δύο σημεῖα Δ, Ζ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ τῆς περιφερείας τοιοῦτον, ὥστε αἱ συνδέουσαι αὐτὸ μετὰ τῶν σημείων Δ καὶ Ζ εὐθεῖαι νὰ τέμνουν τὴν περιφέρειαν κατὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὁρίζοντα χορδὴν παράλληλον τῆς ΔΕ εὐθείας.

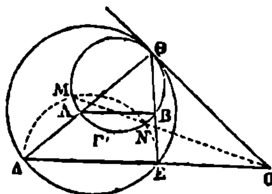
Α'. Λύσις. Ὑπενθυμίζομεν ἐν συντομίᾳ τὴν λύσιν ἣν ἀνεπτύξαμεν εἰς τὰς *Μεθόδους* (§ 140).

Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Α, τέμνουσαν τὴν εὐθεῖαν ΔΖ εἰς Ε (Σχ. 963). Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΖΔΓ εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{ΔΕ}{ΔΓ} = \frac{ΔΑ}{ΔΖ} \quad \text{ἐξ ἧς} \quad ΔΕ = \frac{ΔΑ \cdot ΔΓ}{ΔΖ} = \frac{ΔΤ^2}{ΔΖ}.$$



Σχ. 963.



Σχ. 964.

Ἐπειδὴ ἡ τελευταία ποσότης εἶναι γνωστή, τὸ σημεῖον Ε κατασκευάζεται, ἄρα καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ.

Β'. Λύσις (Σχ. 964). Γνωρίζομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι, αἱ ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων ἐσωτερικῶς εἰς σημεῖον Θ, τέμνονται κατὰ χορδὰς παραλλήλους ὑπὸ τῶν πλευρῶν τυχούσης γωνίας ἐχούσης τὴν κορυφήν της εἰς τὸ Θ. Τὸ πρόβλημα, συνεπῶς, ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν περιφερείας, διερχομένης διὰ τῶν Δ, Ε καὶ ἐφαπτομένης τῆς δοθείσης:

Κατασκευή. Διὰ τῶν σημείων Δ καὶ Ε γράφομεν τυχοῦσαν περιφέρειαν, τέμνουσαν τὴν δοθεῖσαν κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΜΝΟ. Αἱ δύο ἐκ τοῦ Ο ἐφαπτόμεναι ΟΘ, ΟΓ' δίδουν τὰς δύο λύσεις τοῦ προβλήματος.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν δευτέραν κατασκευὴν δυνάμεθα νὰ ὁδηγηθῶμεν καὶ ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ κέντρον ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΘΑΒ, ΘΔΕ, ὡς καὶ τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰ τρίγωνα ταῦτα. Ἑπομένως, τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς τῶν περιφερειῶν τούτων, ὡς τῆς δοθείσης ΑΜΘ, καὶ τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων Δ καὶ Ε.

Πρόβλημα 495

1510. Δίδονται δύο σημεῖα Α, Η, μία περιφέρεια καὶ μία εὐθεῖα ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε αἱ συνδέουσαι αὐτὸ μετὰ τῶν Α καὶ Η εὐθεῖαι, νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς περιφερείας χορδὴν ΖΘ παράλληλον τῆς εὐθείας ΒΓ.

(*Μέθοδοι*, § 52).

Πρόβλημα τοῦ Castillon 496

1511. Δίδονται περιφέρεια καὶ τρία σημεῖα. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν περιφέρειαν τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ διέρχωνται, ἀνὰ μία, δι' ἑκάστου τῶν τριῶν δοθέντων σημείων.

(*Μέθοδοι*, § 51).

1511 α. Σημείωσις. Ὁ *Πάππος* ἔλυσε τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ τρία δοθέντα σημεῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Ὁ Gabriel Cramer—εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλονται καὶ οἱ ὁμώνυμοι τύποι τῆς Ἀλγέβρας—ἐγενίκευσε τὸ πρόβλημα διὰ τυχοῦσαν θέσιν τῶν τριῶν σημείων καὶ τὸ προέτεινε πρὸς λύσιν εἰς τὸν Castillon. Ὁ μαθηματικὸς οὗτος ἔδωσεν μίαν συνθετικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τὸ 1776, συναγομένην ἐξ ἐκείνης τοῦ *Πάππου.* Τὸ ἴδιον ἔτος, ὁ Lagrange ἐδημοσίευσε μίαν πολὺ ἁπλῆν ἀναλυτικὴν λύσιν· ἡ κομψοτέρα πάντως κατασκευὴ εἶναι αὐτὴ τὴν ὁποίαν δίδομεν καὶ ὀφείλεται εἰς τὸν Annibale Giordano di Ottaiano. Καὶ ἄλλοι ἐπίσης ἐπελήφθησαν τοῦ ἰδίου προβλήματος, ὡς οἱ Malfatti, Lhuillier, Servois καὶ Poncelet.

(Βλ. σχετικῶς: N. A., 1844, σ. 463, σημείωμα τοῦ Terquem, A. d. G., τ. II, 1811 - 12, σ. 27 - 29 καὶ τόμ. XIV, 1823 - 24, σ. 46 καὶ 48.

Πρόβλημα 496—I

1511 β. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν, νὰ περιγραφῇ τρίγωνον, ἔχον ἀνὰ μίαν τῶν κορυφῶν του ἐπὶ ἑκάστης ἐκ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν.

Τὸ *ἐναλλακτὸν* τοῦ προηγουμένου τοῦ Castillon πρόβλημα τοῦτο λύεται εὐκόλως διὰ τῶν ἀντιστρόφων πολικῶν (A. d. G., τόμος I, 1810 - 1811, σ. 125). Ὁ Servois, καθηγητὴς τότε εἰς τὴν σχολὴν πυροβολικοῦ τοῦ Lafére, ἐπέλυσε αὐτὸ διὰ τῆς χρήσεως μόνον τοῦ κανόνος (Αὐτόθι, σ. 337).

Πρόβλημα 496—II

1512. Εἰς δοθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, νὰ περιγραφῇ ἄλλο, ὅμοιον δοθέντος εηζθ (Lamé, σ. 16, n° 12 τῶν Examen κλπ. αὐτοῦ).

Ἐργαζόμενοι κατὰ τρόπον ἀνάλογον ἐκείνου ὃν ἐφηρμόσαμεν διὰ τὴν περιγραφὴν τετραγώνου εἰς δοθὲν τετράπλευρον (§ 1020), ἀγόμεθα εἰς τὰ ἑπομένας κατασκευάς:

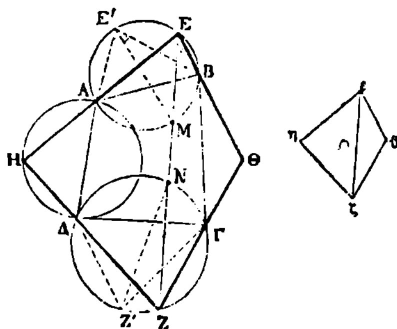
Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΔ, ΑΒ καὶ ΔΓ τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου γράφομεν κ τόξα, δεχόμενα γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς εηζ, ηεζ καὶ θζη γωνίας.

Ἀρκεῖ, προφανῶς, νὰ εὕρωμεν σημεῖον Η ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΕΗΖ νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ εηζ.

Διαιροῦμεν πρὸς τοῦτο τὸ τόξον ΑΜΒ εἰς δύο μέρη τοιαῦτα,

ὥστε $\widehat{AEM} = \widehat{\eta\varepsilon\zeta}$ καί, ἑπομένως, $\widehat{MEB} = \widehat{\zeta\varepsilon\theta}$. Ἡ διαίρεσις αὕτη ἐπιτυγχάνεται ἀμέσως διὰ τῆς κατασκευῆς τῆς γωνίας ΑΕ'Μ ἴσης πρὸς τὴν ηεζ.

Ἀναλόγως, κατασκευάζομεν καὶ τὴν γωνίαν ΔΖ'Ν ἴσην πρὸς



Σχ. 965.

τὴν ηζε. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ ὁρίζει ἐπὶ τῶν τόξων ΑΕ'Β καὶ ΔΖ'Γ τὰς κορυφὰς Ε καὶ Ζ τοῦ ζητουμένου τετραπλεύρου ΕΗΖΘ.

Ἐπειδὴ τοῦτο θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν εηζθ, ὡς ἀποτελουμένων ἀμφότερων ἐκ τριγώνων ὁμοίων (ἀντιστοίχως).

1512 α. ***Σημείωσις.*** Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν δι' ἀπ' εὐθείας μεθόδου τὴν ἑπομένην εἰδικὴν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος περίπτωσιν:

Δοθεισῶν τεσσάρων εὐθειῶν α, β, γ, δ *κειμένων εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, νὰ ἀχθῇ διατέμνουσα αὐτῶν συναντῶσα αὐτὰς εἰς σημεῖα* Α, Β, Γ, Δ *ἀντιστοίχως, τοιαύτη, ὥστε*

$$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta.$$

Βλέπε: *Des Méthodes en Géométrie* τοῦ Paul Serret, σ. 13, πρόβλ. 1 καὶ *Mathesis*, 1903, σ. 88.

Κατασκευαὶ Τριγώνων

Πρόβλημα 497

1513. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως, τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας καὶ τοῦ λόγου τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Πρόβλημα 497—Ι

1514. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τοῦ ποδὸς τῆς ἐπὶ μίαν ἐξ αὐτῶν διχοτόμου.

Πρόβλημα 498

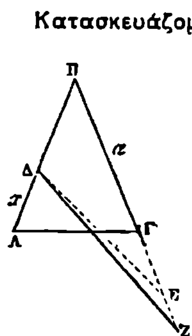
1515. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως, τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας καὶ τοῦ γινομένου τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης.

(*Μέθοδοι*, § 106).

Πρόβλημα 499

1516. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς γωνίας, τοῦ γινομένου α^2 τῶν πλευρῶν αὐτῆς καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπέναντι τῆς δοθείσης γωνίας πλευρὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη δυνατή.

Κατασκευάζομεν τρίγωνον ἰσοσκελὲς ΑΒΓ, ἔχον τὴν γωνίαν Β ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ΒΑ, ΒΓ πλευρὰς ἴσας πρὸς α. Ἔστω δὲ τυχὸν ἄλλο τρίγωνον ΔΒΖ (Σχ. 966), κείμενον ἐπὶ τοῦ πρώτου (κατὰ τὸ σχῆμα) καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ γινόμενον ΒΔ.ΒΖ τῶν πλευρῶν του νὰ εἶναι ἴσον πρὸς $ΒΑ.ΒΓ = \alpha^2$.



Σχ. 966.

Ἔστω Ε σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΖ εἰς ἀπόστασιν $ΓΕ = ΓΔ = x$ ἀπὸ τοῦ Γ. Θὰ ἔχωμεν

$$ΒΔ . ΒΕ = (\alpha - x)\ (\alpha + x) = \alpha^2 - x^2.$$

Ἐπειδή, ὁσονδήποτε μικρὰ καὶ ἂν εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ μήκους x, ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου τούτου μένει μικροτέρα τοῦ α^2, εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΔΒΖ εἶναι $ΒΔ . ΒΖ = \alpha^2$, τὸ μῆκος ΓΖ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $ΓΕ = x$.

Θὰ εἶναι, ἑπομένως, καὶ $ΔΖ > ΔΕ$. Ἀλλ' εἶναι (§ 581) $ΑΓ < ΔΕ$, καὶ κατὰ μείζονα λόγον ἄρα

$$ΑΓ < ΔΖ.$$

Εἶναι δηλαδὴ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ τό, ἐκ τῶν διαφόρων τριγώνων ΔΒΖ, ἔχον την ἐλαχίστην πλευρὰν ἀπέναντι τῆς γωνίας Β.

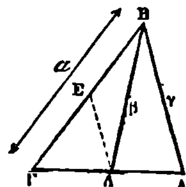
Πρόβλημα 500

1517. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως, τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

(*Μέθοδοι*, § 107).

Πρόβλημα 501

1518. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τοῦ μήκους τῆς μεταξὺ αὐτῶν διχοτόμου.



Σχ. 967.

(*Μέθοδοι*, § 43).

Εἰς τὴν ἀνωτέρω λύσιν δυνάμεθα νὰ παραθέσωμεν καὶ τὴν ἑπομένην (J. M. E. et Sp., 1877, σ. 303):

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΓΕ}{ΓΒ} = \frac{ΓΔ}{ΓΑ} = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma},$$

ἀφοῦ

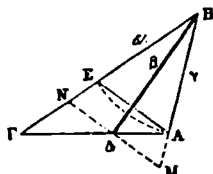
$$\frac{ΓΔ}{ΔΑ} = \frac{\alpha}{\gamma},$$

καὶ $$ΓΕ = ΓΒ \cdot \frac{α}{α+γ} = \frac{α^2}{α+γ},$$

$$ΒΕ = ΒΓ - ΓΕ = α - \frac{α^2}{α+γ} = \frac{αγ}{α+γ}.$$

Εἶναι, κατὰ συνέπειαν, γνωσταὶ αἱ πλευραὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΔΕΒ, τοῦτο κατασκευάσιμον κλπ.

Παρατήρησις. Παραθέτομεν ἀκόμη καὶ τὴν ἀκόλουθον λύσιν ἐκ τοῦ *Cours de Mathématiques à l'usage des candidats à l'École Centrale*, τοῦ Combe-rousse, τόμ. 2ος, σ. 224:



Σχ. 968.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, ΒΕ = ΒΑ καὶ ΜΔΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΑ ἢ κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΒΔ.

Θὰ ἔχωμεν $\frac{α}{γ} = \frac{ΓΔ}{ΔΑ}$

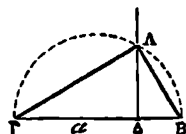
καὶ $$\frac{ΓΝ}{ΝΕ} = \frac{ΓΔ}{ΔΑ} = \frac{α}{γ}.$$

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οὕτω τὸ σημεῖον Ν, ἀφοῦ ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν τὸ τμῆμα $ΓΕ = α - γ$ εἰς τμήματα ἀνάλογα τῶν $α$ καὶ $γ$.

Διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΝΒΔ, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὰ τὸ ὕψος ΒΔ καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΒΝ, εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν γωνίαν ΑΒΓ.

Πρόβλημα 501—I

1519. **Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας.**



Σχ. 969.

Ἔστω $α$ ἡ ὑποτείνουσα καὶ $μ^2$ ἡ δοθεῖσα διαφορά.

Α'. Τρόπος. Ἔχομεν

$$β^2 + γ^2 = α^2,$$
$$β^2 - γ^2 = μ^2,$$

ἄρα $$β^2 = \frac{α^2 + μ^2}{2}, \quad γ^2 = \frac{α^2 - μ^2}{2}.$$

Εἶναι, ἑπομένως, γνωστὰ τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου καὶ τοῦτο ἀμέσως κατασκευάσιμον.

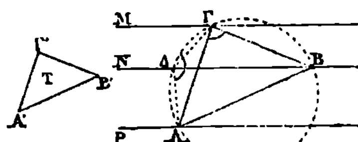
Ἀπὸ ἀπόψεως κατασκευῆς, ὁ ἑπόμενος τρόπος εἶναι ταχύτερος.

Β'. Τρόπος. Γράφομεν ἐπὶ τῆς δοθείσης ὑποτεινούσης ΒΓ ἡμιπεριφέρειαν καὶ κατασκευάζομεν τὸν τόπον ΔΑ τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν Β καὶ Γ εἶναι $μ^2$ (§ 71). Τὸ κοινὸν σημεῖον Α τῶν δύο γραμμῶν εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ, κατὰ τὰ ἐπιτάγματα τῆς ἐκφωνήσεως, τριγώνου.

Πρόβλημα 502

1520. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὅμοιον δοθέντος ἄλλου (Τ) καὶ τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν (Μ), (Ν), (Ρ).

Ἔστω (Τ) τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ ΑΒΓ τὸ ζητούμενον. Ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τέμνει τὴν εὐθεῖαν (Ν) εἰς σημεῖον Δ, αἱ δὲ περὶ τὸ σημεῖον αὐτὸ γωνίαι ΓΔΒ, ΒΔΑ καὶ ΓΔΑ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Α, Γ γωνίας τοῦ ΑΒΓ (ἢ τοῦ Τ) καὶ πρὸς τὸ παραπλήρωμα 180° - Β τῆς τρίτης γωνίας αὐτοῦ καὶ ἑπομένως εἶναι γνωστῶν μεγεθῶν.



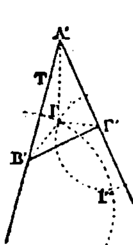
Σχ. 970.

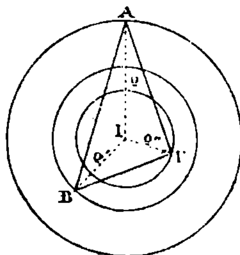
Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης, καθίσταται φανερὸν ὅτι, ἐὰν σχηματίσωμεν τὰς γωνίας ταύτας περὶ αὐθαίρετόν τι σημεῖον Δ τῆς εὐθείας (Ν), ἡ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ περιγεγραμμένη περιφέρεια θὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν (Ν) εἰς δεύτερον σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ.

Παρατήρησις. Ὑπάρχουν, ἐν γένει, ἓξ διάφοροι λύσεις, ἀναλόγως τῆς τάξεως καθ' ἣν λαμβάνονται αἱ εἰς τὸ Δ γωνίαι.

Πρόβλημα 502—Ι

1520 α. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὅμοιον ἄλλου (Τ) καὶ τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν.





Σχ. 971.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, Α'Β'Γ' τὸ (Τ) καὶ Ι' τὸ ὁμόλογον τοῦ σημείου Ι εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Ἐπειδή:

$$\frac{Ι'Α'}{Ι'Β'} = \frac{ΙΑ}{ΙΒ} = \frac{ρ}{ρ'}$$

καὶ

$$\frac{Ι'Β'}{Ι'Γ'} = \frac{ΙΒ}{ΙΓ} = \frac{ρ'}{ρ''},$$

τὸ σημεῖον Ι' θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν περιφέρειαν $\left(Α', Β', \frac{ρ}{ρ'}\right)$, ὡς καὶ εἰς τὴν $\left(Β', Γ', \frac{ρ'}{ρ''}\right)$. Θὰ εἶναι ἑπομένως ἓν τῶν δύο, ἐν γένει, κοινῶν σημείων Ι', Ι'' τῶν περιφερειῶν αὐτῶν. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευάσωμεν ἓν τῶν σημείων τούτων, τὸ Ι' λ.χ., καὶ ἐκ τοῦ κοινοῦ τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν κέντρου Ι φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΙΑ, ΙΒ, ΙΓ παραλλήλους ἀντιστοίχως τῶν Ι'Α', Ι'Β', Ι'Γ', εἶναι φανε-

ρόν ὅτι τὸ λαμβανόμενον τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Α'Β'Γ' καὶ ἴσον ἑπομένως πρὸς τὸ ζητούμενον.

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ σημεῖον Ι'' καὶ αἱ ἐκ τοῦ Ι παράλληλοι πρὸς τὰς Ι''Α', Ι''Β', Ι''Γ' δίδουν μίαν δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος.
2) Ἡ ἐναλλαγὴ τῶν θέσεων τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ἐπὶ τῶν τριῶν περιφερειῶν (ρ), (ρ'), (ρ'') μᾶς ὁδηγεῖ εἰς δώδεκα, ἐν συνόλῳ καὶ διαφόρους ἐν γένει λύσεις.

1520 β. Σημείωσις. Ὁ μηχανικὸς Combier εἰς μίαν *Note de Géométrie* αὐτοῦ δίδει πληρεστάτην τριγωνομετρικὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος καὶ ἐπιλαμβάνεται ἰδιαιτέρως τοῦ προβλήματος τοῦ ὁρισμοῦ τριγώνου ἐκ τοῦ κέντρου βάρους, τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς αὐτό. Ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ προβλήματος εἶναι ἀνέφικτος διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου (Βλ. σχετικῶς: Ν. Α., 1870, σ. 311, Lemoine καὶ *J. d. M. E.* τῶν Bourget καὶ Köhler, 1879, σ. 120 καὶ 133).

1520 γ. Πρόβλημα τοῦ Euler. Τὸ προηγούμενον πρόβλημα τοῦ Combier ἀνάγεται εἰς τὸ ἑπόμενον τοῦ *Euler: Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν σημείων* Ι, Θ, Η (κέντρου ἐγγεγραμμένης περιφερείας, κέντρου βάρους καὶ ὀρθοκέντρου). Ἐπειδὴ τὸ κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας λαμβάνεται διὰ προεκτάσεως τῆς ΗΘ κατὰ μῆκος ΘΟ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΗΘ.
Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, δὲν δύναται νὰ ἐπιλυθῇ γεωμετρικῶς διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου.
(Βλ. σχετικῶς: Ν. Α., 1870, σ. 311 καὶ 315.— *I. d. M.*, 1904, σ. 301, nº 2815. Brocard, Majol). Ἐπίσης: *Discussion d'un triangle donné par les points remarquables* Ο, Ι, Η, ὑπὸ G. Fontené (Ν. Α., 1905, σ. 241 καὶ 1908, σ. 558).
Τὸ πρόβλημα τῆς *κατασκευῆς τριγώνου ἐκ τριῶν ἀξιοσημειώτων σημείων* τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, δύναται νὰ ὁδηγήσῃ εἰς μέγα ἀριθμὸν ἐνδιαφερουσῶν ἀσκήσεων καὶ μάλιστα ὅταν μεταξὺ τῶν σημείων αὐτῶν περιλαμβάνωνται τὰ σημεῖα Κ, Ω, Ω', τῶν Lemoine καὶ Brocard. Περιοριζόμεθα νὰ ὑποδείξωμεν τοὺς ἑξῆς συνδυασμούς:

Α, Β, Θ — Α, Θ, Ο — Α, Θ, Κ — Α, Ο, Κ — Α, Β, Κ
Α, Β, Ω — Α, Ο, Ω.

(*Mathesis*, τομ. VII, 1887, σ. 24), κατὰ τὸν Emmerich).
Διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἀντιστοίχων τριγώνων, βλέπε ἐπίσης καὶ τὴν σημείωσιν § 1523, ε.

Πρόβλημα 503

1521. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως, τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας καὶ τοῦ λόγου $\frac{\mu}{\nu}$, τοῦ ἀθροίσματος πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον.
Ὁ τόπος τῶν σημείων Δ τῶν τοιούτων, ὥστε διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ κυκλ. τόξον (Β, Γ, Α), νὰ εἶναι

$B\Delta = BA + A\Gamma$, εἶναι τὸ κ. τόξον $\left(A, \Gamma, \frac{\widehat{A}}{2}\right)$ (§ 921).

Ὁμοίως, ὁ τόπος τῶν σημείων Ε, διὰ τὰ ὁποῖα

$$BE = AB - A\Gamma,$$

εἶναι τὸ κ. τόξον $\left(B, \Gamma, 90^\circ + \frac{A}{2}\right)$ (§ 922).

Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος $\frac{B\Delta}{BE}$ εἶναι ὁ δοθεὶς $\frac{\mu}{\nu}$, τὸ σημεῖον Ε θὰ ἀνήκῃ καὶ εἰς τὸν τόπον τῶν σημείων τῶν διαιρούντων τὰς χορδὰς ΒΔ τοῦ ἐξωτερικοῦ τόξου κατὰ τὸν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$, δηλ. εἰς περιφέρειαν (Κ) μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα ΒΝ, τῆς διαμέτρου ΒΜ τῆς περιφερείας τοῦ τόξου τούτου, τὸ τοιοῦτον, ὥστε

$$\frac{BM}{BN} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Σχ. 972.

Εἶναι, ἑπομένως, τὸ Ε τομὴ τοῦ τόξου $\left(B, \Gamma, 90^\circ + \frac{A}{2}\right)$ καὶ τῆς περιφερείας (Κ). Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ σημείου τούτου, εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

Πρόβλημα 503—I

1522. **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς διχοτόμου δ_α, τοῦ ὕψους υ_α καὶ τοῦ γινομένου $\beta\gamma = k^2$ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α.**

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΗΙ εἶναι κατασκευάσιμον, ὡς ἔχον τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΗ γνωστὰ μήκη.

Ἡ δὲ θέσις τῆς διαμέτρου ΑΔ ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἶναι ὡρισμένη, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι συμμετρική, ὡς γνωστόν, τοῦ ὕψους ΑΗ πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΙ.

Γνωρίζομεν, ἀφ' ἑτέρου, ὅτι

$$\beta\gamma = k^2 = 2R\upsilon_\alpha$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἀκτὶς

$$R = \frac{\beta\gamma = k^2}{2\upsilon_\alpha}$$

τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἶναι μῆκος γνωστόν. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΔ τμῆμα $AO = R$ καὶ γράψωμεν τὴν περιφέρειαν (Ο, R), τὰ σημεῖα τομῆς ταύτης καὶ τῆς εὐθείας, ἐφ' ἧς κεῖται ἡ πλευρὰ ΙΗ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΙΗ, θὰ εἶναι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ Β, Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Σχ. 973.

Πρόβλημα 503—II

1522 α. **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν μηκῶν τριῶν τυχουσῶν ἐκ τῶν ἑπομένων εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς αὐτοῦ: ὕψους, διχοτόμου, διαμέσου καὶ συμμετροδιαμέσου.**

Ἔστω Α ἡ κοινὴ κορυφὴ καὶ υ, δ, μ, μ′ τὰ τέσσαρα μήκη. Θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς συνδυασμοὺς αὐτῶν:

(υ, δ, μ), (υ, δ, μ′), (υ, μ, μ′) καὶ (δ, μ, μ′).

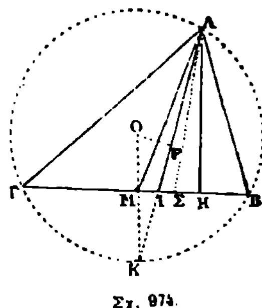
1) Δίδονται τὰ μήκη υ, δ, μ.

Ἔστω ΑΗ (Σχ. 974) τὸ ὕψος. Μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνας μ καὶ δ, γράφομεν περιφερείας, τεμνούσας τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΗ εἰς τὸ Η κατὰ τὰ σημεῖα Μ καὶ Ι. Προεκτείνομεν ἀκολούθως τὴν διχοτόμον ΑΙ μέχρι τοῦ σημείου Κ, καθ' ὃ αὕτη συναντᾷ τὴν κάθετον εἰς τὸ Μ ἐπὶ τὴν ΜΙΗ, καὶ φέρομεν κάθετον εἰς τὸ μέσον Ρ τῆς ΑΚ. Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν τελευταίων δύο καθέτων εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ ζητούμενον τρίγωνον περιφερείας.

Ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὴν ΜΙΗ κατὰ τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς Β, Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

2) Δίδονται τὰ υ, δ, μ′.

Ἀναγόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, εὑρίσκοντες τὴν ΑΜ, ὡς συμμετρικὴν τῆς ΑΣ = μ′ πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΙ.



Σχ. 974.

3) Δίδονται υ, μ, μ′.

Ἀναγόμεθα πάλιν εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, φέροντες τὴν διχοτόμον ΑΙ τῆς γωνίας τῶν ΑΣ καὶ ΑΜ.

4) Δίδονται τὰ δ, μ, μ′.

Διὰ νὰ ἀναχθῶμεν καὶ πάλιν εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, θὰ πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν πρῶτον τὸ τρίγωνον ΜΑΣ, ἔχον ὡς μῆκος τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α αὐτοῦ τὸ δοθὲν δ.

Πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν τμῆμα ΑΙ μήκους δ καὶ γράφομεν περιφερείας μὲ κοινὸν κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνας μ καὶ μ′. Ἐπειδὴ

$$\frac{ΙΜ}{ΙΣ}=\frac{ΑΜ}{ΑΣ}=\frac{μ}{μ'},$$

ἀρκεῖ διὰ τοῦ σημείου Ι νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν ΜΙΣ, τέμνουσαν τὰς γραφείσας περιφερείας εἰς σημεῖα Μ καὶ Σ τοιαῦτα, ὥστε

$$\frac{ΙΜ}{ΙΣ}=\frac{μ}{μ'}.$$

Ἡ εὕρεσις τῶν σημείων τούτων ἐπιτυγχάνεται διὰ τοῦ γνωστοῦ γ. τόπου (*Μέθοδοι*, § 65).

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον δ τῆς γωνίας ΒΑΓ διὰ τῆς διχοτόμου δ′ τῆς ἐξωτερικῆς τῆς ἰδίας γωνίας.

Ἐπειδὴ αἱ διχοτόμοι δ, δ′ εἶναι αἱ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογω-

νίου τριγώνου ΙΑΕ, μὲ ὕψος ΑΗ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἴσον πρὸς τὸ υ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ δεδομένα (δ, δ', υ) ἀντιστοιχοῦν, ἐν ἐν τῇ πράξει, εἰς δύο μόνον δεδομένα ἐκ τῶν τριῶν τούτων μηκῶν καὶ ἑπομένως δὲν ὁρίζουν τρίγωνον. Ἀφ' ἑτέρου, τὰ δεδομένα (υ, δ, μ), (υ, δ, μ') ἰσοδυναμοῦν προφανῶς πρὸς τὰ (υ, δ', μ) καὶ (υ, δ', μ').

Πρόβλημα 503—III

1522 β. **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς διχοτόμου ΑΙ τῆς γωνίας Α, τοῦ γινομένου βγ = k² τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας αὐτῆς καὶ τῆς διαφορᾶς δ τῶν παρὰ τὴν πλευρὰν ΒΓ γωνιῶν τοῦ τριγώνου** (Σχ. 973, 974).

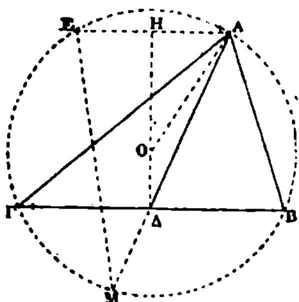
Ἡ διαφορὰ τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἰς τὸ σημεῖον Ι εἶναι ἴση πρὸς Β — Γ = δ (§ 465). Εἶναι ἑπομένως κατασκευάσιμον τὸ τρίγωνον ΑΗΙ καὶ γνωστὸν ἄρα τὸ ὕψος ΑΗ.

Ἐπειδὴ δὲ $\beta\gamma = 2\,R\upsilon_\alpha$ καὶ $R = \dfrac{\beta\gamma}{2\upsilon_\alpha} = \dfrac{k^2}{2\,.\,AH}$, εἶναι γνωστὸν ἐπίσης καὶ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος ΑΟ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, ὡς καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς διαμέτρου ΑΟ, ἀφοῦ ἡ ΑΙ εἶναι διχοτόμος τῆς γων. ΗΑΟ (Σχ. 973).

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εὑρίσκεται εἰς *J. M. E.* τοῦ Longchamps, 1883, σ. 158.

Πρόβλημα 503—IV

1522 γ. **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς βάσεως ΒΓ, τῆς ἐπ' αὐτὴν διαμέσου καὶ τῆς διαφορᾶς δ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.**



Σχ. 973.

Ἔστω: ΑΔ = μ, ΒΓ = α, Β — Γ = δ.

1η Λύσις. Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον, παρατηροῦμεν ὅτι:

$$A\Delta\,.\,\Delta M = B\Delta^2 = \frac{\alpha^2}{4},$$

ἐξ οὗ $\Delta M = \dfrac{\alpha^2}{4\mu}$

καί, ἂν ΑΕ παράλληλος τῆς ΒΓ,

γων. ΑΟΗ = ΑΜΕ = δ

ἢ ΑΟΔ = 180° — δ.

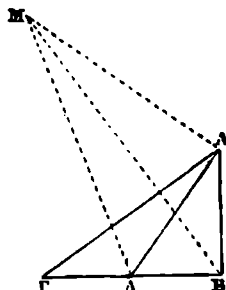
Ἐκ τῶν σχέσεων αὐτῶν ἕπεται ἡ ἀκόλουθος κατασκευή.

Ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΔ = μ γράφομεν κ. τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς 180° — δ. Προεκτείνομεν ἀκολούθως τὴν ΑΔ κατὰ μῆκος $\Delta M = \dfrac{\alpha^2}{4\mu}$ καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΜ ὑψοῦμεν κάθετον, συναντῶσαν εἰς Ο τὸ τόξον ΔΟΑ.

Τὸ σημεῖον Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ περιφερείας καὶ ΟΑ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς. Αἱ τομαὶ Β, Γ, τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ Δ ἐπὶ τὴν ΟΔ, εἶναι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2α Λύσις. Ἔστω ΑΒΓ πάλιν τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ ΑΔΜ τρίγωνον εὐθέως ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΒΑ καὶ ἔχον τὴν πλευρὰν ΑΔ ὁμόλογον τῆς ΔΒ (Σχ. 976). Ἐκ τῶν ἐκ τῆς ὁμοιότητος ταύτης ἀναλογιῶν εὑρίσκομεν

$$\Delta M = \frac{\Delta A^2}{\Delta B} = \frac{\mu^2}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\mu^2}{\alpha}.$$



Σχ. 976.

Ἐπειδὴ δὲ

$$\text{γων. } BAM = \Gamma\Delta A$$

καὶ

$$\frac{AB}{AM} = \frac{\Delta B}{\Delta A} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A},$$

τὰ τρίγωνα ΒΑΜ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως

$$\text{γων. } AB M = \Gamma, \quad \text{γων. } MB\Gamma = \delta.$$

Ἐκ τῶν παρατηρήσεων αὐτῶν ἀγόμεθα εἰς τὴν ἑπομένην κατασκευήν:

1) Γράφομεν εὐθεῖαν ΒΜ, σχηματίζουσαν μετὰ τῆς δοθείσης ΒΓ γωνίαν ΜΒΓ ἴσην πρὸς δ.

2) Κατασκευάζομεν τὸ μῆκος $\Delta M = \frac{2\mu^2}{\alpha}$ καὶ μὲ κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα ΔΜ γράφομεν περιφέρειαν, τέμνουσαν τὴν ΒΜ εἰς Μ.

3) Ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΔΜ λαμβάνομεν μῆκος ΔΑ = μ. Οὕτω ὁρίζεται ἡ κορυφὴ Α, ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

1522 δ. ***Σημείωσις.*** Ἡ πρώτη λύσις εἶναι τῶν Niewenglowski καὶ Wild καὶ ἡ δευτέρα τοῦ Laisant. Εἰς τὰ πρακτικὰ τῆς *Association française pour l'avancement des Sciences*, τῶν συνεδρίων αὐτῆς εἰς *Boulogne-sur-Mer* (1899) καὶ εἰς *Παρισίους* (1900), ὁ Lemoine συγκρίνει δέκα τέσσαρας γεωμετρικὰς λύσεις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος καί, ἀπὸ ἀπόψεως γεωμετρικογραφικῆς, δίδει τὴν προτίμησίν του εἰς τὴν λύσιν τοῦ Laisant. Αἱ ἄλλαι λύσεις ἀνήκουν εἰς τοὺς P. Niewenglowski, E. Collignon, Desboves, Bessel, κλπ.

Πρόβλημα 505—V

! **1522 ε.** Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν, τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπέναντι αὐτῶν γωνιῶν καὶ ἐκ τῆς τρίτης πλευρᾶς. (*Int. d. Math.*, 1909, σ. 7, nº 3511· Ansermet).

Λύσεις τοῦ προβλήματος τούτου δίδονται, εἰς τὴν αὐτὴν συλλογὴν καὶ τεῦχος, ὑπὸ Barbarin, σ. 167, Welsch, σ. 179.

Πρόβλημα 504

1523. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν ἀκτίνων δύο ἐκ τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας. (Van Aubel. *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1876, σ. 315).

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Γνωρίζομεν ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Β, Γ, Ο, Ο' ἀνήκουν εἰς

τὴν αὐτὴν περιφέρειαν καὶ τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι τὸ μέσον Ζ τοῦ τόξου ΒΖΓ (§ 1259). Ἐπομένως,

$$ΔΖ = R.$$

Ἀφ' ἑτέρου, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Euler (§ 327):

$$ΟΔ^2 = R(R - 2ρ),$$

$$Ο'Δ^2 = R(R + 2ρ_α),$$

ποσότητες κατασκευάσιμοι.

Εἰς τὸ τρίγωνον, ἄρα, ΟΔΟ' εἶναι γνωσταὶ δύο πλευραὶ καὶ ἡ

Σχ. 977.

μεταξὺ αὐτῶν διάμεσος καὶ ἑπομένως (§ 980, 2)) εἶναι τοῦτο κατασκευάσιμον. Αἱ δὲ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ, τῶν περιφερειῶν μὲ κέντρα Ο, Ο' καὶ ἀκτῖνας τὰς δοθείσας ρ καὶ $ρ_α$, καθορίζουν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Πρόβλημα 504—I

1523 α. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι δοθὲν τετράγωνον k^2, αἱ δὲ κορυφαί του εὑρίσκονται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

Σχ. 978

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, μ, ν αἱ ἀποστάσεις δύο τῶν παραλλήλων ἀπὸ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν ΖΖ' καὶ $β^2 - γ^2 = k^2$.

Ἐὰν ὡς κορυφὴν Α ἐκλέξωμεν τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΖΖ', τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι τελείως ὡρισμένον ἐὰν γνωρίσωμεν τὸ μῆκος ΔΒ. Ἔστω τοῦτο y καὶ ΕΓ $= x$.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων

$$β^2 = μ^2 + x^2,$$

$$γ^2 = ν^2 + y^2,$$

εὑρίσκομεν, δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη, τὴν

$$β^2 - γ^2 = k^2 = μ^2 - ν^2 + x^2 - y^2,$$

ἐξ ἧς

$$x^2 - y^2 = k^2 + ν^2 - μ^2. \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων ἀφ' ἑτέρου ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΕΓ, ΑΒΔ (ἀφοῦ γων. ΑΓΕ = ΒΑΔ), ἕπεται

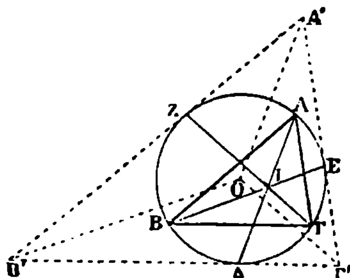
$$\frac{x}{\mu} = \frac{\nu}{y} \quad \text{ἢ} \quad xy = \mu\nu. \qquad (2)$$

Εἶναι, ἑπομένως, τὰ μήκη x, y τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) κατασκευάσιμα, ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Πρόβλημα 604—II

1523 β. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν τομῶν Δ, Ε, Ζ, τῶν προεκτάσεων τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων αὐτοῦ καὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας.

Ἐπειδὴ ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἶναι ἡ διὰ τῶν Δ, Ε, Ζ γραφομένη, ἄρα ὡρισμένη, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς εἰς τὰ Δ, Ε, Ζ, μέσα τῶν τόξων ΒΓ κλπ., παράλληλοι, προφανῶς, πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ΑΒΓ, ἡ ἀγωγὴ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' ὁρίζει τρίγωνον Α'Β'Γ' ὁμοιόθετον τοῦ ΑΒΓ.



Σχ. 979.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον τομῆς Ο, τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ', εἶναι τὸ ἐν τῇ ὁμοιοθεσίᾳ ὁμόλογον τοῦ ἀντιστοίχου σημείου Ι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ τοῦ ζητουμένου τούτου τριγώνου εὑρίσκονται ἀμέσως, ὡς τομαὶ τῆς περιφερείας (ΔΕΖ) καὶ τῶν ἐκ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ ἀγομένων παραλλήλων πρὸς τὰς διχοτόμους ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

1523 γ. Σημείωσις. 1) Βλ. σχετικῶς *J. d. M. E. et Sp.* τοῦ Bourget, 1880, σ. 542.

2) Ἡ κατασκευὴ τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῶν σημείων καθ' ἃ αἱ προεκτάσεις τῶν ὑψῶν τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν, εἶναι πολὺ ἁπλῆ (§ 666).

3) Γνωρίζομεν νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἐκ τῶν σημείων καθ' ἃ αἱ διάμεσοι αὐτοῦ τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Fitz-Patrick καὶ εἶναι ὡραιοτάτη, ὡς παρατηρεῖ καὶ ὁ J. Neuberg εἰς τὴν *Mathesis* (1904, σ. 107-110).

4) Ἐπίσης κατασκευάζεται εὐκόλως τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν σημείων Α', Β', Γ', καθ' ἃ αἱ εὐθεῖαι ΑΙ, ΒΙ, ΓΙ συναντοῦν τὴν ἐγγεγραμμένην περιφέρειαν (Ι)· ἐπειδὴ $\frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{B'I\Gamma'} - 90°$. (Cristesco, *Mathesis*, 1904, σ. 158, n° 9).

5) Τὸ πρόβλημα: *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον* ΑΒΓ *ἐκ τῶν συμμετρικῶν* Α', Β', Γ' *τῶν κορυφῶν αὐτοῦ πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς*, ὁδηγεῖ εἰς ἐξίσωσιν ἑβδόμου βαθμοῦ. Ἡ κατασκευὴ εἶναι ἀδύνατος διὰ

τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, ἐκτὸς δι' ὡρισμένας εἰδικὰς περιπτώσεις (*I. d. M.*, 1900, σ. 356 καὶ 1902, σ. 17 ἕως 20. G. Espanet).

6) Ἡ κατασκευὴ τριγώνου ἐκ τῶν ποδῶν τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων (Ch. Bioche), ὁδηγεῖ εἰς ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ (*I. M.*, 1898, σ. 33. G. Ricalde).

7) Ὁμοίως ἡ κατασκευὴ τριγώνου ἐκ τῶν ποδῶν τῶν συμμετροδιαμέσων αὐτοῦ (E.-N. Barisien), ὁδηγεῖ εἰς ἐξίσωσιν δωδεκάτου βαθμοῦ. (G. Espanet, *I. M.*, 1905, σ. 21, n° 2585).

Πρόβλημα 504—III

1523 δ. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν τριῶν ὑψῶν $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ αὐτοῦ.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων

$$(2E=)\,αυ_α = βυ_β = γυ_γ$$

ἕπονται καὶ αἱ

$$\frac{α}{υ_β} = \frac{β}{υ_α} = \frac{γυ_γ}{υ_β \cdot υ_α} = \frac{γ}{\dfrac{υ_α υ_β}{υ_γ}}.$$

Εἶναι δηλ. τὸ ζητούμενον τρίγωνον (α, β, γ) ὅμοιον τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰ γνωστὰ μήκη $υ_β$, $υ_α$, $\frac{υ_α υ_β}{υ_γ}$. Μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου τούτου, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εὑρίσκεται εὐκόλως κατὰ τὸν ὑποδεικνυόμενον τρόπον ἐν τῇ παραγράφῳ 1617 (ἐπμ.).

1523 ε. Σημείωσις. Γνωρίζομεν νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἐκ τῶν τριῶν διαμέσων ἢ τῶν τριῶν ὑψῶν αὐτοῦ (§§ 980 καὶ 1617)· ἀλλὰ αἱ περιπτώσεις αὐταὶ εἶναι σχεδὸν αἱ μόναι. Οὕτω, ὁ Catalan προέτεινε εἰς τὸ *Manuel des Candidats a l'École Polytechnique* αὐτοῦ (1857-1858, εἰς δύο τόμους) τὴν κατασκευὴν τριγώνου ἐκ τῶν τριῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων· καὶ μολονότι πολλαὶ ἀπόπειραι ἔγιναν διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου, παραμένει ἀκόμη ἄλυτον. Ὁ Barbarin, τὸ 1896, ἀπέδειξεν διὰ τοῦ λογισμοῦ ὅτι ἡ κατασκευὴ τριγώνου τοῦ ὁποίου δίδονται τρεῖς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχόμεναι διχοτόμοι ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς λύσεως ἐξισώσεως δεκάτου τετάρτου βαθμοῦ. (Βλ. σχ.: *Mathesis*, 1896, σ. 143 καὶ 154· 1902, σ. 159, ὡραῖον ἄρθρον τοῦ Delitala. Ἐπίσης: *I. d. M.*, 1896, σ. 275· 1903, σ. 64· 1904, σ. 149, ζήτ. 270, H. Lez· 1904, σ. 171. Βιβλιογραφικαὶ σημειώσεις τοῦ H. Brocard.

Δυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν ἀκόμη τὰ ἀκόλουθα δύο προβλήματα:

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου Ο *τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τῶν πλευρῶν του ἢ ἐκ τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου* I *τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τῶν κορυφῶν του.*

Ἀλγεβρικῶς λύονται τὰ προβλήματα ταῦτα ἀλλὰ δὲν κατασκευάζονται γεωμετρικῶς. Ἐπειδὴ ἀμφότερα ὁδηγοῦν εἰς ἐξισώσεις τρίτου βαθμοῦ (Vallès). Βλ. *A. d. G.*, τόμος XXI, σ. 65 καὶ σ. 98, ὅπου τὰ προβλήματα ταῦτα ἀνάγονται εἰς τὸ *πρόβλημα τοῦ Νεύτωνος :*

Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἐκ τριῶν χορδῶν αὐτῆς, ὑποτεινουσῶν τόξα ἔχοντα ἄθροισμα τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου εὑρίσκεται εἰς τὴν *Ἀναλ. Γεωμετρίαν* τοῦ Lefébure. Βλ. ἐπίσης καὶ προηγουμένην σημείωσιν § 1520 β.

1523 ζ. Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἀκόμη καὶ τὸ πρόβλημα: *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐξ ἑνὸς ὕψους, μιᾶς διχοτόμου καὶ μιᾶς διαμέσου, τῶν ἀγομένων ἀπὸ τριῶν διαφόρων κορυφῶν* (E. Coupy). Ἡ λύσις ἡ διδομένη ὑπὸ τοῦ Poudra ἀνάγεται εἰς τὴν τομὴν μιᾶς περιφερείας καὶ μιᾶς καμπύλης τρίτου βαθμοῦ. (N. A., 1855, σ. 117 καὶ 413).— Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, τεθὲν ὑπὸ τοῦ A. Rebière εἰς τὸ *I. d. M.*, (1895, σ. 203, n° 600), ἐπελύθη ἀλγεβρικῶς ὑπὸ τοῦ Ph. Fay διὰ μιᾶς ἐξισώσεως ἕκτου βαθμοῦ.

Πρόβλημα 504—IV

1523 η. Τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ σταθερὸν σημεῖον Χ τοῦ ἐπιπέδου του, ἔστωσαν δὲ Α', Β', Γ' αἱ τομαὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἰς δύο τυχούσας θέσεις $Α_1Β_1Γ_1$ καὶ $Α_2Β_2Γ_2$ αὐτοῦ.

Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον ΧΑ'Β'Γ' μένει πάντοτε ὅμοιον ἑαυτῷ καὶ εὕρετε τρόπον ὁρισμοῦ τοῦ σημείου Χ, ἐν σχέσει πρὸς τὸ ΑΒΓ, ὥστε τὸ σημεῖον τοῦτο νὰ εἶναι πάντοτε τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου ἢ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' κύκλου, ἢ τὸ ὀρθόκεντρον ἢ τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἰδίου τριγώνου. (J. Neuberg, *Mathesis*, τόμ. IX, 1889, σ. 149 ἕως 151).

Κατασκευαὶ τετραπλεύρων

1524. Μολονότι τὰ προβλήματα τὰ ἀναφερόμενα εἰς κατασκευὰς τριγώνων δύνανται, εἰς πολλὰς περιπτώσεις, νὰ ὁδηγήσουν εἰς κατασκευὰς καὶ τετραπλεύρων, ἐν τούτοις δὲν θὰ ἐπιμείνωμεν ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου.

Ἄλλωστε ἔχουν δοθεῖ ἤδη εἰς προηγουμένας παραγράφους (1490,... 1499, 1512) ἀρκετὰ ἐνδιαφέροντα παραδείγματα. Θὰ περιορισθῶμεν διὰ τοῦτο εἰς τὰ ἑπόμενα εἰς ἓν μικρὸν ἀριθμὸν σχετικῶν προβλημάτων.

Ἡ σπουδὴ τῶν τετραπλεύρων παρουσιάζει πολὺ ἐνδιαφέρον, ἕνεκα τῶν ἐφαρμογῶν τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν εἰς τοὺς *ἀντιστροφεῖς* καί, γενικώτερον, εἰς τὰ *ἀρθρωτὰ συστήματα* (§§ 1195, 1203).

Πρόβλημα 505

1524 α. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἐκ τῶν ἀκολούθων δεδομένων:

1) Τῆς περιμέτρου καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

2) Τῆς περιμέτρου καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν ἰδίων πλευρῶν.

3) Τῆς περιμέτρου καὶ τοῦ λόγου τῶν ἰδίων πλευρῶν.

1) (Βλ. *Μέθοδοι*, § 104).

2) Κατασκευάζομεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΔΕ (Σχ. 62) καὶ γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΡΜ - τόπον τῶν σημείων Μ δι' ἃ $MA^2 - ME^2 = k^2$. Ἐπειδή, ἂν ληφθῇ τὸ σημεῖον Ρ οὕτως, ὥστε

$$PA^2 - PE^2 = k^2,$$

θὰ εἶναι

$$PA^2 - PM^2 = PA^2 - PE^2 = k^2.$$

3) Κατασκευάζομεν πάλιν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΔΕ καὶ εὑρίσκομεν τὴν τομὴν Μ τῆς πλευρᾶς τούτου ΔΕ μετὰ τῆς εὐθείας διὰ τοῦ Α - τόπου τῶν σημείων Μ, δι' ἃ ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν ἀπὸ τῶν ΑΧ, ΑΥ εὐθειῶν εἶναι ὁ δοθεὶς $\frac{\mu}{\nu}$.

Πρόβλημα 505—I

1525. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ διαγωνίων αὐτοῦ.

(*Μέθοδοι*, § 110).

Πρόβλημα 505—II

1525 α. 1) Νὰ κατασκευασθῇ ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν τετράπλευρον ἐκ τῶν ἀποστάσεων τῶν τεσσάρων πλευρῶν ἀπὸ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

2) Νὰ κατασκευασθῇ περιγράψιμον εἰς περιφέρειαν τετράπλευρον ἐκ τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας.

(*Mathesis*, 1885, σ. 68, ζήτημα 378).

Πρόβλημα τοῦ Sturm 506

1526. Νὰ κατασκευασθῇ ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν τετράπλευρον ἐκ τῶν τεσσάρων πλευρῶν αὐτοῦ.

(*Μέθοδοι*, § 151).

1526. Σημείωσις. 1) Ὁ Lamé ἐπεξειργάσθη τὸ ἴδιον θέμα εἰς μίαν ἀξιωσημείωτον ἐργασίαν του: *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie* (1818, σ. 19, n° 14).

2) Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τρία διάφορα τετράπλευρα, ἔχοντα ὡς πλευρὰς δοθέντα μήκη καὶ ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. Τὰ τετράπλευρα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα (*Guéneau d'Aumont*, A. G., 1822, σ. 269).

Ἐὰν x, y, z εἶναι αἱ τρεῖς διάφοροι ἀλλήλων διαγώνιοι τῶν τριῶν τούτων σχημάτων, Ε ἡ κοινή των ἐπιφάνεια καὶ R ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν τοῦ G. Fontené:

$$xyz = 4ER.$$

(*Bulletin τῶν Gérard καὶ Michel*, 1903 - 1904, σ. 147).

3) Κατ' ἀνάλογον τρόπον κατασκευάζομεν καὶ ἓν τυχὸν τετράπλευρον ἐκ τῶν τεσσάρων πλευρῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ. (*Mathesis*, 1903, σ. 61 καὶ 63· κομψὴ λύσις καὶ ὡραία σπουδὴ τοῦ θέματος ὑπὸ Lauvernay).

4) Διὰ τὰ ἐγγράψιμα τετράπλευρα, βλ. ἄρθρον τοῦ Neuberg εἰς *Mathesis*, 1906, σ. 14.—Ὠφέλιμος εἶναι ἐπίσης καὶ ἡ ἀνάγνωσις μιᾶς ἐργασίας τοῦ Dostor: *Propriétés nouvelles des quadrilatères en général, avec applications aux quadrilatères inscriptibles, circonscriptibles, etc.*

Πρόβλημα 506—I

1526 β. Δίδονται δύο τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ, κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔχοντα κοινὴν τὴν κορυφὴν Ο. Νὰ στραφῇ τὸ ἓν ἐξ αὐ-

τῶν περὶ τὸ σημεῖον Ο κατὰ γωνίαν τοιαύτην, ὥστε τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ νὰ καταστοῦν ὁμοκυκλικὰ (Educational Times).

Βλ. *Mathesis*, 1902, σ. 71, ζτμ. 1802· λύσις ὑπὸ Emmerich.

Κέντρον ὁμοιότητος 506—II

1527. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ κέντρον ὁμοιότητος ἢ διπλοῦν σημεῖον δύο σχημάτων εὐθέως ὁμοίων.

Ὀνομάζονται σχήματα εὐθέως ὅμοια, δύο ὅμοια σχήματα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ἐὰν δύνανται νὰ καταστοῦν ὁμοιόθετα ἀλλήλων διὰ στροφῆς τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν περὶ τὸ κέντρον ὁμοιότητος αὐτῶν Σ (§ 1146).

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ Α'Β' δύο ὁμόλογα εὐθύγραμμα τμήματα τῶν δύο σχημάτων καὶ Δ' τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ἐφ' ὧν ταῦτα κεῖνται.

Α'. Τρόπος. Ὁρίζομεν τὸ *σημεῖον τοῦ Miquel* Σ τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΒ'Α' (§ 21), διὰ τοῦ σημείου τομῆς, τοῦ διαφόρου τοῦ Δ', τῶν περιφερειῶν (ΑΑ'Δ') καὶ (ΒΒ'Δ') (Σχ. 980). Τὸ σημεῖον τοῦτο Σ εἶναι τὸ ζητούμενον διπλοῦν σημεῖον τῶν δύο σχημάτων· πράγματι, τὰ τρίγωνα ΣΑΒ, ΣΑ'Β' εἶναι εὐθέως ὅμοια, ἀφοῦ αἱ γωνίαι ΣΑΒ, ΣΑ'Β' ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, καθὼς καὶ αἱ ΣΒΑ καὶ ΣΒ'Α'. Ἐπομένως,

$$\frac{\Sigma A}{\Sigma A'} = \frac{\Sigma B}{\Sigma B'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ διέρχονται καὶ αἱ περιφέρειαι (ΔΑΒ) καὶ (ΔΑ'Β'). Αἱ τέσσαρες αὗται περιφέρειαι δύνανται νὰ κληθοῦν καὶ *περιφέρειαι τοῦ Miquel* τοῦ τετραπλεύρου ΑΑ'Β'Β.

Β'. Τρόπος. Θεωρήσωμεν τὰ συζυγῆ ἀλλήλων σημεῖα Μ, Μ', τὰ τοιαῦτα, ὥστε :

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{M'A}{M'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΜΜ' εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν σταθερῶν σημείων Α καὶ Α' εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων τμημάτων ΑΒ καὶ Α'Β'. Διέρχεται, ἑπομένως, ἡ περιφέρεια αὕτη διὰ τοῦ σημείου Σ.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον) διέρχεται καὶ ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τό, ἀναλόγως πρὸς τὸ ΜΜ' κατασκευαζόμενον, τμῆμα ΝΝ'. Εἶναι, κατὰ συνέπειαν, τὸ *διπλοῦν σημεῖον* Σ τὸ ἓν τῶν σημείων τομῆς τῶν περιφερειῶν (Μ, Μ') καὶ (Ν, Ν').

Τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον Σ' τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι τὸ κέντρον ὁμοιότητος τῶν δύο ἀντιστρόφως ὁμοίων σχημάτων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ''

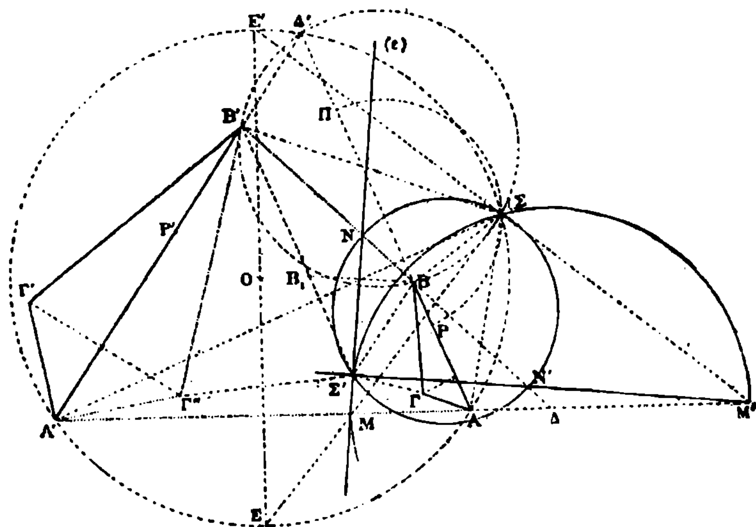
Ἐπειδὴ τὸ *σημεῖον τοῦ Miquel* Σ εἶναι ἐπίσης τὸ κέντρον εὐθείας ὁμοιότητος διὰ τὰ τμήματα ΑΑ' καὶ ΒΒ', συμπεραίνομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι μὲ διαμέτρους ΡΠ καὶ Ρ'Π', ὅπου Ρ, Π, Ρ', Π' σημεῖα τοιαῦτα, ὥστε

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\Pi A}{\Pi B} = \frac{AA'}{BB'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{P'A'}{P'B'} = \frac{\Pi'A'}{\Pi'B'} = \frac{AA'}{BB'},$$

διέρχονται ἐπίσης διὰ τοῦ σημείου Σ.

Αἱ τέσσαρες περιφέρειαι (Μ, Μ'), (Ν, Ν'), (Ρ, Π), (Ρ' Π') δύνανται νὰ ὀνομασθοῦν *περιφέρειαι τοῦ Ἀπολλωνίου* τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΒ'Α'. Ὑπάρχουν, ἑπομένως, ὀκτὼ περιφέρειαι διερχόμεναι διὰ τοῦ διπλοῦ σημείου δύο σχημάτων εὐθέως ὁμοίων.

Γ'. Τρόπος. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν (ε), ἥτις εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α'Β' ἀναλόγους τῶν μηκῶν τῶν τμημάτων τούτων (§ 2395), καθὼς καὶ τὴν εὐθεῖαν (ε') - τόπον τῶν ἀναλόγων διαιρέσεων τῆς § 2396. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Σ, ἀφοῦ τὸ σημεῖον τοῦτο μετέχει καὶ τῶν δύο χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῶν σημείων τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.



Σχ. 950.

Διὰ τοῦ σημείου Σ διέρχονται καὶ αἱ, ἀνάλογοι πρὸς τὰς προηγουμένας δύο, εὐθεῖαι διὰ τὰ τμήματα ΑΑ' καὶ ΒΒ', καθὼς καὶ ὀκτὼ ἄλλαι εὐθεῖαι, ἀνάλογοι ἐπίσης πρὸς τὰς ἰδίας εὐθείας.

Δ'. Τρόπος. Ὑποθέτοντες γνωστὸν τὸ ζητούμενον σημεῖον Σ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία ΑΣΑ' εἶναι ἴση πρὸς τὴν γνωστὴν γωνίαν ΑΔ'Α' τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α'Β'. Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ θὰ εἶναι

$$\frac{ΣΑ}{ΣΑ'} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'},$$

τὸ σημεῖον Σ θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΕΜΣ τῆς γωνίας ΑΣΑ'. Ἐκ τῶν παρατηρήσεων τούτων συνάγομεν εὐκόλως τὴν ἑπομένην κατασκευήν·

Γράφομεν κ. τόξον ΑΔ'Α' δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς γωνίαν Δ' τῶν εὐθειῶν ΑΒ, Α'Β' καὶ διαιροῦμεν τὸ τμῆμα ΑΑ' εἰς μέρη

ΜΑ, ΜΑ' ἀνάλογα τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ Α'Β'. Ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὸ μέσον Α τοῦ τόξου ΑΕΑ' μετὰ τοῦ σημείου Μ τέμνει τὸ τόξον ΑΔ'Α' κατὰ τὸ ζητούμενον σημεῖον Σ.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ὁρίσωμεν καὶ τὸ σημεῖον Μ' τῆς εὐθείας ΑΑ', δι' ὃ $\frac{M'A}{M'A'}=\frac{AB}{A'B'}$ καὶ νὰ φέρωμεν τὴν Μ'Ε' (ὅρα σχῆμα).

Ἡ εὐθεῖα αὕτη διέρχεται ἐπίσης διὰ τοῦ σημείου Σ, ὡς ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΣΑ'.

Δι' ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων κύκλων τοῦ Miquel (τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΒ'Α'), ὁρίζονται καθ' ὅμοιον τρόπον ἀνὰ δύο, αἱ ἀνάλογοι πρὸς τὰς ΜΕ ἢ Μ'Ε', εὐθεῖαι. Δυνάμεθα, ἑπομένως, νὰ διατυπώσωμεν τὸ ἑπόμενον Θεώρημα:

1527 α. Θεώρημα. **Ὀκτὼ περιφέρειαι καὶ δώδεκα εὐθεῖαι, εὐκόλως προσδιοριζόμεναι, διέρχονται διὰ τοῦ διπλοῦ σημείου δύο σχημάτων εὐθέως ὁμοίων.**

1527 β. Πλῆθος διακεκριμένων κατασκευῶν. Δύο γραμμαὶ—εὐθεῖαι, περιφέρειαι ἢ εὐθεῖα καὶ περιφέρεια—ἀρκοῦν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου Σ. Ἀλλ' ἡ κατασκευὴ τῆς διχοτόμου ΕΜΣ λ. χ. ἀπαιτεῖ καὶ τὴν χάραξιν τῆς περιφερείας ΑΑ'Ε'. Ἑπομένως δὲν ὑπάρχει λόγος νὰ θεωρήσωμεν τὴν τομὴν τῆς ΕΜΣ καὶ μιᾶς τῶν ἑπτὰ ἄλλων (2ος τρόπος) περιφερειῶν.

Οὕτω, αἱ κατασκευαὶ τῶν διχοτόμων λαμβάνονται διὰ *ὀκτὼ διαφόρων κατασκευῶν*· ὅσον ἀφορᾷ τὰς ὀκτὼ περιφερείας καὶ τὰς τέσσαρας ἄλλας εὐθείας, λαμβάνομεν $\binom{12}{11}=\frac{12.11}{2}=66$ διαφόρους κατασκευάς. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ ἔχωμεν τὸ σημεῖον Σ διὰ $66+8=74$ διαφόρων κατασκευῶν.

Διὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εὐθέως ὅμοια, τὸ σημεῖον Σ δύναται νὰ ὁρισθῇ διὰ 453 διακεκριμένων κατασκευῶν· τοὐλάχιστον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ τετράπλευρον ΑΒΑ'Β' εἶναι κυρτὸν—καὶ τὴν μόνην ἄλλωστε ἣν ἐξητάσαμεν (Βλ. καὶ ἐπμ. § 1546 ζ).

Πρόβλημα 506—III

1527 γ. **Νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἄξων συμμετρίας (ἢ διπλῆ εὐθεῖα) καὶ τὸ κέντρον ὁμοιότητος δύο σχημάτων ἀντιστρόφως ὁμοίων.**

Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τὰ σχήματα ταῦτα (Σχ. 980).

Αἱ περιφέρειαι μὲ διαμέτρους ΜΜ', ΝΝ' ὁρίζουν ἀμέσως τὸ κέντρον Σ' τῆς ἀντιστρόφου ὁμοιότητος, ἀφοῦ τὰ τρίγωνα ΑΣ'Β καὶ Α'Σ'Β' εἶναι ἀντιστρόφως ὅμοια.

Αἱ δύο εὐθεῖαι—τόποι τῶν παραγράφων 2395 καὶ 2396 τέμνονται ἐπίσης εἰς τὸ σημεῖον Σ'.

Ὁ ἄξων συμμετρίας (ε) εἶναι ἡ διχοτόμος τῶν γωνιῶν ὡς αἱ ΒΣ'Β', ΑΣ'Α' κλπ. καὶ ὁρίζεται ἑπομένως εὐκόλως διὰ τοῦ σημείου Σ'.

Δυνάμεθα, ἀντιστρόφως, νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸν ἄξονα συμμετρίας καὶ δι' αὐτοῦ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ σημεῖον Σ'.

Ὁ ἄξων οὗτος εἶναι ἡ εὐθεῖα ΜΝ—ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν διαιροῦν τὰ τμήματα ΑΑ' καὶ ΒΒ', ἀντιστοίχως, εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ὁμολόγων μηκῶν ΑΒ καὶ Α'Β'. Ἂν δὲ B_1 εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην, ἡ εὐθεῖα $B'B_1$ τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Σ'.

Τέλος, τὸ σημεῖον Σ' λαμβάνεται καὶ διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΜΝ καὶ Μ'Ν'.

Διὰ στροφῆς κατὰ 180° περὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΝ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀντιστρόφως ὁμοίων σχημάτων, τὸ ἄλλο σχῆμα καὶ τὸ διὰ τῆς στροφῆς ταύτης λαμβανόμενον καθίστανται ὁμοιόθετα ἀλλήλων.

1527 δ. *Ἴσα σχήματα.* Διὰ δύο σχήματα ἴσα δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν κατασκευὴν τοῦ Chasles (§§ 770 καὶ 920) ἢ καὶ τὰς ἀνωτέρω ὑποδειχθείσας διὰ δύο ὅμοια σχήματα, ἀλλὰ μὲ τὰς καταλλήλους ἁπλοποιήσεις.

Ἡ χάραξις λ. χ. τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων καὶ τῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους ΜΜ' καὶ ΝΝ', γίνεται διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ Chasles. Ἐπειδὴ αἱ δύο τελευταῖαι αὗται γραμμαὶ εἶναι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ' [86].

Πρόβλημα 506—IV

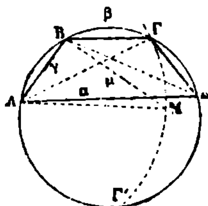
1527 ε. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν νὰ ἐγγραφῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὰ τὰ μήκη τῶν τριῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ καὶ ΕΖ. (Traité de Géométrie τῶν Rouché καὶ Comberousse, 7η ἔκδ. σ. 406, n° 363).

Ἡ πολὺ κομψὴ λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, ἡ διδομένη ὑπὸ τῆς *Mathesis* (1895, σ. 12, n° 2), κατὰ τὸ *El progresso matematico*, ἀπαιτεῖ τὴν στοιχειώδη γνῶσιν τῆς θεωρίας τῶν πόλων καὶ πολικῶν.

Ἐφαρμογαὶ τῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων

Πρόβλημα 507

1528. Διὰ δύο δοθέντων σημείων μιᾶς περιφερείας νὰ ἀχθοῦν δύο παράλληλοι χορδαὶ καὶ τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον μ^2.



Σχ. 981.

Ἂς εἶναι Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα, ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον ἰσοσκελὲς τραπέζιον. Θὰ ἔχωμεν

$$ΑΒ = ΓΔ \quad \text{καὶ} \quad ΑΓ = ΒΔ.$$

Γνωρίζομεν ὅτι, εἰς πᾶν τραπέζιον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν πλέον τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τῶν βάσεων. Παριστῶντες ἑπομένως τὰ μήκη τῶν βάσεων διὰ α καὶ β, διὰ δ τὸ κοινὸν μῆκος τῶν διαγωνίων καὶ διὰ γ τὸ γνωστὸν τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$2\delta^2 = 2\gamma^2 + 2\alpha\beta = 2\gamma^2 + 2\mu^2,$$

ἐξ ἧς

$$\delta^2 = \gamma^2 + \mu^2.$$

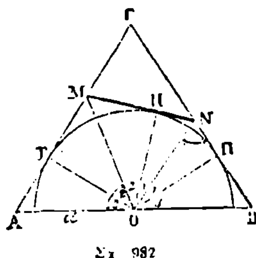
---

86. Σημ. μετ. Πράγματι, τὸ Μ λ. χ. θὰ εἶναι τότε τὸ μέσον τῆς ΑΑ' καὶ τὸ Μ' τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον αὐτῆς.

Τὸ πρόβλημα ἑπομένως λύεται διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΜΒ, ἔχοντος καθέτους πλευρὰς γ καὶ μ, καὶ τῆς μεταφορᾶς, κατὰ τὸ σχῆμα, τοῦ μήκους ΑΜ εἰς τὴν θέσιν ΑΓ.

Πρόβλημα 508

1529. Δίδονται δύο ἐφαπτόμεναι μιᾶς περιφερείας καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ τρίτη ἐφαπτομένη τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς, τὸ μεταξὺ τῶν δύο πρώτων περιεχόμενον, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος.



Σχ. 982

1) Δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἀλγεβρικὴν σχέσιν (§ 239), ἢ νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς γραφικὴν κατασκευὴν (§ 978 α).

2) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ μέγεθος τῆς γωνίας ΜΟΝ εἶναι ὡρισμένον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ παραπληρώματος ΡΟΠ τῆς γωνίας Γ. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης ὁδηγούμενοι, ἀγόμεθα εἰς τὸ *ἀντίθετον πρόβλημα* τοῦ δοθέντος καὶ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΜΟΝ, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὰ ἡ βάσις ΜΝ, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία ΜΟΝ καὶ τὸ ὕψος ΟΗ (§ 105).

3) Δυνάμεθα νὰ ἀναχθῶμεν ἐπίσης εἰς γνωστὰ ἤδη προβλήματα (§§ 262 καὶ 978 α).

Πρόβλημα 508—I

1530. Νὰ διαιρεθῇ τόξον περιφερείας εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε αἱ ὑποτείνουσαι αὐτὰ χορδαὶ νὰ ἔχουν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ δοθέντα.

Τὸ ἤδη λυθὲν τοῦτο πρόβλημα (§ 1418) ἀναφέρεται ἐνταῦθα ὡς ἀνῆκον φυσικῶς εἰς τὴν ὁμάδα τῶν ἑπομένων προβλημάτων (§§ 1531 ἕως 1535).

Πρόβλημα 508—II

1531. Νὰ διαιρεθῇ τόξον περιφερείας εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε αἱ ὑποτείνουσαι αὐτὰ χορδαὶ νὰ ἔχουν ἄθροισμα δοθὲν λ.

Τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν *κατασκευὴν τριγώνου ἐκ τῆς βάσεως, τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν αὐτοῦ.*

(*Μέθοδοι*, § 115 καὶ §§ 921, 989).

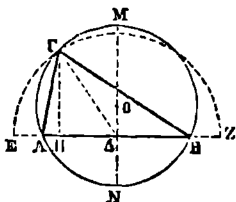
Πρόβλημα 508—III

1532. Ὅμοιον πρόβλημα ἀλλ' ὅπου ἡ διαφορὰ τῶν χορδῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος λ.

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ ἑπόμενον (§§ 922, 989): *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως, τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.*

Πρόβλημα 508—IV

1533. Ὁμοίως : Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν χορδῶν νὰ εἶναι δοθὲν τετράγωνον k^2.



Σχ. 983.

1) Χρησιμοποιοῦμεν τὸν τόπον τῆς § 69. Ἡ τομὴ Γ τοῦ δοθέντος τόξου AB καὶ τῆς περιφερείας ταύτης, εἶναι τὸ σημεῖον διαιρέσεως.

2) Διὰ τοῦ τόπου τῆς § 71.

Πρόβλημα 508—V

1534. Ὁμοίως : Τὸ γινόμενον τῶν χορδῶν νὰ εἶναι δοθὲν τετράγωνον k^2.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας ἐπὶ τὸ ἐπὶ τὴν τρίτην πλευρὰν ὕψος, θὰ ἔχωμεν (Σχ. 983).

$$ΓH = \frac{k^2}{MN = 2R} = \text{ποσότης γνωστή}.$$

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται οὕτω εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνου ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας καὶ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους (§ 105).

Πρόβλημα 508—VI

1535. Δίδεται περιφέρεια μὲ διάμετρον BΓ. Νὰ ἀχθῇ χορδὴ BA τοιαύτη, ὥστε τὸ μῆκός αὐτῆς νὰ συνδέεται διὰ δοθείσης σχέσεως μετὰ τοῦ μήκους BΔ, τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν διάμετρον.

Ἂς εἶναι ρ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας, γ ἡ ζητουμένη χορδὴ καὶ x ἡ προβολή της ἐπὶ τὴν διάμετρον BΓ. Θὰ ἔχωμεν πρῶτον τὴν γνωστὴν γενικὴν σχέσιν :

$$\gamma^2 = 2\rho x.$$

Ἐὰν εἶναι γνωστὰ τὸ *ἄθροισμα* ἢ ἡ *διαφορὰ* τῆς χορδῆς καὶ τῆς προβολῆς της ἢ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἰδίων μηκῶν, ἀγόμεθα εἰς ἐξίσωσιν β'. βαθμοῦ πρὸς τὸν ἕνα ἐκ τῶν ἀγνώστων x καὶ γ.

Τὸ μέγιστον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο αὐτῶν μηκῶν εἶναι 4ρ καὶ τῆς διαφορᾶς των $\frac{\rho}{2}$. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν, ἡ χορδὴ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν κανονικοῦ ἑξαγώνου.

Ἐὰν εἶναι γνωστὸς ὁ *λόγος* τῆς χορδῆς πρὸς τὴν προβολήν της, ὁδηγούμεθα εἰς ἐξίσωσιν *πρώτου* βαθμοῦ, *τρίτου* δὲ ἐὰν δίδεται τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως τὴν πραγματικὴν ρίζαν δὲν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν διὰ τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ διαβήτου.

Πρόβλημα 508—VII

1535 α. Διὰ δοθέντος σημείου P νὰ ἀχθῇ τέμνουσα PAB περιφερείας δοθείσης τοιαύτη, ὥστε ἡ προβολὴ τῆς χορδῆς AB ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ P διάμετρον νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος.

Βλέπε: *Question de Géométrie* τοῦ Desboves, 2α ἔκδ., σ. 344. *Int. d. Math.*, 1899, σ. 165, n° 1412.

Πρόβλημα 509

1536. Διὰ τοῦ μέσου δοθέντος τόξου μιᾶς περιφερείας, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς, τὸ μεταξὺ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου καὶ τοῦ ἄλλου μέρους τῆς περιφερείας, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος (4 λύσεις). (Francoeur, Cours des Mathématiques, τόμ. I).

(*Μέθοδοι*, § 320).

Πρόβλημα 509—I

1536 α. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ ἀπὸ τῆς ὁποίας τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ, ἐπ' εὐθείας γραμμῆς κείμενα, ἀπέχουν ἴσας ἀποστάσεις.

Ἂς εἶναι ΑΛ = ΒΜ = ΓΝ, ΟΑ = α, ΟΒ = ΟΓ = β.

Τὸ κέντρον Δ τῆς ζητουμένης περιφερείας θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου ΥΥ′ εἰς τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΒΓ.

Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ἀποστάσεως ΟΔ = y, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΔΟΒ καὶ ΔΟΑ, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰ μήκη τῶν ΑΔ, ΒΔ συναρτήσει τῶν γνωστῶν ποσοτήτων α, β καὶ τῆς ἀγνώστου y.

Σχ. 984.

Θὰ ἔχωμεν:

$$ΑΛ = \sqrt{α^2 + y^2} - ρ, \quad ΒΜ = ρ - \sqrt{β^2 + y^2}$$

καὶ ἡ σχέσις ΑΛ = ΒΜ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\sqrt{α^2 + y^2} + \sqrt{β^2 + y^2} = 2ρ.$$

Εὑρίσκομεν δύο τιμάς, ἴσας καὶ ἀντιθέτων σημείων, διὰ τὸ y.

Παρατήρησις. Ἐάν, ἀντὶ τῶν Β καὶ Γ, τὰ Α καὶ Β πρέπει νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας, τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται ἄλλας δύο λύσεις. Δύο ἄλλας ἐπίσης λύσεις λαμβάνομεν ἐὰν τὸ Α καὶ Γ πρέπει νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας καὶ τὸ Β εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς.

Ὑπάρχουν λοιπὸν ἐν συνόλῳ ἓξ λύσεις τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα τοῦ Πάππου 510

1537. Δι' ἑνὸς σημείου τῆς διχοτόμου δοθείσης γωνίας, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τῶν πλευρῶν ταύτης εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἐντὸς τῆς γωνίας τμῆμα τῆς τεμνούσης νὰ ἔχῃ μῆκος δοθέν.

Ἡ ἀλγεβρικὴ λύσις (§ 300), ἀναφέρεται εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Διὰ τοῦ *ἀντιθέτου προβλήματος* (§ 213), τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὰ γνωστὰ τῶν παραγράφων 320 καὶ 321 προβλήματα.

1538. Σημείωσις. Τὸ *πρόβλημα τοῦ Πάππου*, εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ δοθὲν σημεῖον ἄνισον ἀπέχει τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, δὲν δύναται νὰ λυθῇ διὰ τῆς χρήσεως τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου μόνον. Ἐπιδέχεται τέσσαρας διαφόρους λύσεις καὶ κατὰ συνέπειαν ἄγει εἰς ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ πλήρη καὶ τῆς ὁποίας δὲν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ῥίζας.

Τὸ πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ διὰ τῶν τομῶν μιᾶς ὑπερβολῆς καὶ μιᾶς περιφερείας καταλλήλως ἐκλεγομένων· βλ. *Mathesis* 1889, σ. 96· Russo ὡς καὶ σ. 183, ὅπου παρατίθεται καὶ τὸ ἑπόμενον σχετικὸν θεώρημα τοῦ Steiner :

Τὰ μέσα τῶν τεσσάρων τμημάτων λ (τῶν τεσσάρων ἐν γένει εὐθυγράμμων τμημάτων - λύσεων τοῦ προβλήματος) *ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν καὶ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον μένει σταθερὸν ὅταν τὸ μῆκος* λ *μεταβάλλεται.*

Βλέπε ἐπίσης καὶ *Σημ.*, § 321 α.

Εἰς *Int. d. Mathématiciens*, 1910, σ. 182, n° 3667 ἀναφέρονται διάφοροι σχετικαὶ παραπομπαί· βλ. τὰ σημειώματα τοῦ Barbarin, ὡς καὶ τὸ μὲ τὸ ψευδώνυμον *Belga*. Τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑπενθυμίζει τὰς πολὺ κομψὰς λύσεις τῶν Russo καὶ Neuberg εἰς τὴν *Mathesis* (1889, σ. 96 καὶ 183).

Ἐνδιαφέρον ἐπίσης παρουσιάζει καὶ ἓν ἄρθρον τοῦ Barbarin : *Le problème de Pappus* εἰς *Ens. Math.*, 1911, σ. 17 - 23.

Μηχανικῶς λύεται εὐκόλως τὸ πρόβλημα τοῦ Πάππου—ὡς καὶ τὸ πρόβλημα τῆς τριχοτομήσεως γωνίας (§ 911) ἢ τὸ τοῦ διπλασιασμοῦ δοθέντος κύβου—τῇ βοηθείᾳ ἑνὸς ὀργάνου γράφοντος διὰ συνεχοῦς κινήσεως μίαν *κογχοειδῆ*.

Τὴν *κογχοειδῆ* ὀφείλομεν εἰς τὸν *Νικομήδη*, ἀλεξανδρινὸν γεωμέτρην καὶ θεωρούμενον σύγχρονον τοῦ περιφήμου γεωγράφου *Ἐρατοσθένους* (276 - 196 π. Χ.). Ὁ τελευταῖος οὗτος ὑπέδειξε μέθοδον—*τὸ κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους*—διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τῶν μικροτέρων ἑνὸς δοθέντος ἀριθμοῦ. (Κατὰ τὴν *Histoire des Mathématiques* τοῦ Ferdinand Höfer, σ. 242).

Ὁ Maximilien Marie ὑποδεικνύει ὡς πιθανὴν χρονολογίαν τῆς γεννήσεως τοῦ Νικομήδου τὸ ἔτος 100 π. Χ. (*Histoire de Sciences mathématiques et physiques*, τόμ. I, σ. 219).

Πρόβλημα 511

1539. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια ΑΔΓ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓ. Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΕΔΖ, περατουμένη εἰς τὴν διάμετρον καὶ τὴν κάθετον ταύτην, κατὰ τρόπον, ὥστε τὰ τμήματα ΔΕ καὶ ΔΖ αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσα.

(*Μέθοδοι*, § 311).

Πρόβλημα 512

1540. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια ΑΔΓ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓ. Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΕΔΖ, περατουμένη εἰς τὰς δύο ταύτας εὐθείας, εἰς τρόπον, ὥστε νὰ πληροῦται μία τῶν ἑπομένων συνθηκῶν :

1) Τὸ τμῆμα ΔΕ νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΔΖ (Σχ. 218).

(*Μέθοδοι*, § 315).

2) Ὁ λόγος τῶν τμημάτων αὐτῶν νὰ εἶναι δοθεὶς $\frac{\mu}{\nu}$ (Σχ. 214).

(*Μέθοδοι*, § 310).

Κατὰ λόγον ἀποτομὴ 513

1542. Ἐπὶ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ δίδονται δύο σημεῖα Δ καὶ Ζ. Νὰ ἀχθῇ διὰ δοθέντος σημείου Α τέμνουσα ΜΑΝ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΧΟΥ εἰς τρόπον, ὥστε τὰ τμήματα ΔΜ καὶ ΖΝ νὰ εὑρίσκωνται εἰς δοθέντα λόγον (Ἀπολλώνιος).

(*Μέθοδοι*, § 332 α).

Χωρίου ἀποτομὴ 514

1543. Δεδομένα τὰ αὐτά: Τὸ γινόμενον ΔΜ, ΖΝ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2 (Ἀπολλώνιος).

(*Μέθοδοι*, § 332 β).

Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν καὶ τὰς ἀκολούθους συνθήκας:

(γ) ΔΜ + ΖΝ = λ, ἄθροισμα δοθέν.

(δ) (§ 333) ΔΜ — ΖΝ = λ, διαφορὰ δοθεῖσα.

(ε) $\frac{ΟΔ.ΟΜ}{ΟΖ.ΟΝ}=\frac{\mu}{\nu}$, λόγος δοθείς.

Διωρισμένη ἀποτομὴ 515

1544. Δοθέντων τεσσάρων σημείων ἐπ' εὐθείας γραμμῆς (ε), ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ πέμπτον τοιοῦτον, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ δύο ἐκ τῶν δοθέντων σημείων νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων μηκῶν μ καὶ ν (Ἀπολλώνιος).

((*Μέθοδοι*, § 334 α).

1544 α. Σημείωσις. Κατὰ τὰς μεθόδους καὶ ἀρχὰς τῆς *Νεωτέρας Γεωμετρίας*, τὰ προβλήματα 513, 514 καὶ 515 δύνανται νὰ λυθοῦν διὰ ὁμοιομόρφου μεθόδου, ὅσον κομψῆς τόσον καὶ ἁπλῆς, ὀφειλομένης εἰς τὸν Chasles (*Géométrie supérieure* τοῦ ἰδίου, nos 290 ἕως 296 καὶ 298).

Τὸ πρόβλημα τῆς *διωρισμένης ἀποτομῆς* ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν *διπλῶν σημείων* μιᾶς *ἐνελίξεως* (G., S. nº 281. Ἐπίσης: *Éléments de Géométrie projective* τοῦ Cremona, nº 267).

Πρόβλημα τοῦ Alhazen 516

1545. Εἰς κυκλικὸν σφαιριστήριον (μπιλιάρδο) τοποθετεῖται μία σφαῖρα εἰς δοθὲν σημεῖον Α. Κατὰ τίνα διεύθυνσιν πρέπει νὰ κινηθῇ ἡ σφαῖρα, ὥστε, μετὰ δύο διαδοχικὰς ἀνακλάσεις ἐπὶ τοῦ πλαισίου τοῦ σφαιριστηρίου, νὰ διέλθῃ πάλιν διὰ τοῦ σημείου Α; (Concours général des collèges de Paris, 1812).

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΑΒΓΑ τὴν τροχιὰν τῆς σφαίρας. Κατὰ τοὺς νόμους κινήσεως τῶν τελείως ἐλαστικῶν σωμάτων (ὡς ὑποτίθενται ἡ σφαῖρα, τὸ πλαίσιον (σπόντα) τοῦ σφαιριστηρίου κλπ.), αἱ γωνίαι ΑΒΟ καὶ ΟΒΡ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς καὶ αἱ γωνίαι ΡΓΟ καὶ ΟΓΑ· καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΟΓ εἶναι ἰσοσκελές, θὰ συμβαίνῃ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸ τρίγωνον ΒΓΑ. Εἶναι ἑπομένως ἡ εὐθεῖα ΒΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ.

Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ Β, Γ καὶ τὴν κάθετον ΕΑΖ ἐπὶ τὴν ΑΟΔ, σχηματίζεται τό, ἰσοσκελὲς καὶ περιγεγραμμένον εἰς τὸ ζητούμενον ΑΒΓ, τρίγωνον ΕΔΖ καὶ τοῦ ὁποίου τὰ ὕψη εἶναι διχοτόμοι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ὁρίζεται ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τοῦ ΔΕΖ, ὡς τὸ ὀρθικὸν αὐτοῦ. Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ τελευταίου, θέτομεν

$$ΟΑ = α, \quad ΟΒ = ρ$$

καὶ θεωροῦμεν τὰ ὅμοια (ὡς ἔχοντα μίαν ὀξεῖαν γωνίαν κοινὴν) ὀρθογώνια τρίγωνα ΖΑΟ καὶ ΖΒΕ. Λαμβάνομεν

$$\frac{ΟΖ}{ΑΖ} = \frac{ΖΕ}{ΖΒ} \quad ἢ \quad \frac{ΟΖ}{ΑΖ} = \frac{2\,ΑΖ}{ΟΖ + ρ}$$

ἢ καὶ

$$2 . ΑΖ^2 = ΟΖ\,(ΟΖ + ρ).$$

Σχ. 985.

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν ἀντικαταστήσωμεν τὸ $2 . ΑΖ^2$ διὰ τοῦ ἴσου του (ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΑΖ) $2 . ΟΖ^2 - 2 . α^2$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς ΟΖ:

$$ΟΖ^2 - ρ\,ΟΖ - 2\,α^2 = 0,$$

ἐξ' ἧς

$$ΟΖ = \frac{ρ \pm \sqrt{ρ^2 + 8\,α^2}}{2},$$

ποσότης εὐκόλως κατασκευάσιμος.

1545 α. *Παρατήρησις.* Ἡ προηγουμένη λύσις εἶναι φυσικὴ καὶ εὐμνημόνευτος, ὡς ἐπίσης καὶ ἐκείνη εἰς τὴν ὁποίαν ὡς ἄγνωστον μῆκος θὰ ἐλαμβάνομεν τὸ ΟΡ.

Ἡ ἑπομένη λύσις (Ν. Α., 1842, σ. 36, Léon Anne) δὲν ἀπαιτεῖ παρὰ τὴν θεώρησιν τῶν ἐφαπτομένων ΔΒ, ΔΓ (σχ. 985).

Δευτέρα λύσις. Προεκτείνομεν τὴν διχοτόμον ΒΟ μέχρι τῆς συναντήσεώς της Ζ μετὰ τῆς καθέτου εἰς τὸ Α ἐπὶ τὴν ΑΟ.

Ὅπως καὶ προηγουμένως, ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου Ζ.

Γράφοντες τὴν περιφέρειαν ΟΜΝ = (ο, α) καὶ συνδέοντες τὰ Ν καὶ Α μετὰ τοῦ σημείου Μ, καθ' ὃ ἡ ΖΟ τέμνει τὴν περιφέρειαν ταύτην, λαμβάνομεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΖ, ΟΜΝ, τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ ὅμοια, ἀφοῦ ἡ γωνία εἰς τὸ Ο εἶναι κοινὴ ἀμφοτέρων.

Ἐπομένως,

$$\frac{OZ}{OA} = \frac{ON}{OM} \quad \text{ἢ} \quad \frac{OZ}{\alpha} = \frac{2\alpha}{OM}$$

καὶ

$$OZ \cdot OM = 2\alpha^2.$$

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΜΑΟ εἶναι ἰσοσκελές, ὡς καὶ τὸ ΒΑΖ ἀφοῦ

$$\widehat{Z} = \Gamma\widehat{B}Z = A\widehat{B}Z.$$

Ἄρα

$$ZM = OB = \rho = OZ - OM.$$

Εἶναι, κατὰ συνέπειαν, τὰ ἄγνωστα μήκη ΟΖ, ΟΜ, *πλευραὶ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὰ τὸ ἐμβαδὸν* $2\alpha^2$ *καὶ ἡ διαφορὰ* ρ *δύο διαδοχικῶν του πλευρῶν.*

1546. *Σημείωσις.* Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα — γνωστὸν καὶ ὡς *πρόβλημα τοῦ κυκλικοῦ σφαιριστηρίου* — ἐλύθη ὑπὸ τοῦ ἄραβος Abhasen ἢ καλλίτερον Alhasen (XI αἰών). Κατὰ παραλλαγὴν αὐτοῦ, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν τὸν δρόμον, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἀκολουθήσῃ ἡ σφαῖρα ὥστε, ἀναχωροῦσα ἀπὸ σημείου δοθέντος Α καὶ μετὰ μίαν ἀνάκλασιν, νὰ διέλθῃ διὰ δευτέρου δοθέντος σημείου Β.

Τὸ ἴδιον πρόβλημα δύναται νὰ διατυπωθῇ κατὰ διαφόρους τρόπους. Ὡς:

1) *Δίδονται περιφέρεια καὶ δύο σημεῖα* Α *καὶ* Β. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀκτινοβόλον σημεῖον (point brillant) τῆς περιφερείας διὰ παρατηρητὴν εἰς* Β *καὶ φωτεινὸν σημεῖον εἰς* Α.

2) *Νὰ ἐγγραφῇ εἰς περιφέρειαν ἰσοσκελὲς τρίγωνον τοῦ ὁποίου δύο ἴσαι πλευραὶ νὰ διέρχωνται διὰ δύο δοθέντων σημείων.*

3) *Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον* Γ *ἐπὶ τῆς περιφερείας τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα* ΓΑ + ΓΒ *νὰ εἶναι ἐλάχιστον ἢ μέγιστον.*

Τὸ γενικὸν πρόβλημα ἐλύθη κατὰ σειρὰν ὑπὸ τῶν Sluze, Huygens, Barrow, τοῦ μαρκησίου de l'Hopital, Riccati, Simson, Puissant, Quételet, κλπ. (*Aperçu historique*, σ. 498. N. A., 1842, σ. 36).

Ὁ Léon Anne (N. A., 1842, σ. 36) ἔδωσε μίαν πληρεστάτην στοιχειώδη σπουδὴν τοῦ θέματος, ὁ δὲ Gerono εἰς N. A., 1844, σ. 242, ἐπεξειργάσθη αὐτὸ ἀναλυτικῶς.

Αἱ (ἀναλυτικαὶ) λύσεις λαμβάνονται διὰ τῶν τομῶν μιᾶς ὑπερβολῆς καὶ τῆς δοθείσης περιφερείας.

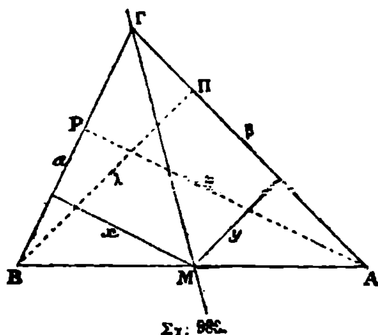
Ὑπάρχουν τέσσαρες λύσεις ἐὰν τὰ σημεῖα Α καὶ Β εὑρίσκωνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας καὶ δύο μόνον ὅταν εὑρίσκωνται ἀμφότερα ἐκτὸς αὐτῆς.

Βλέπε σχετικῶς: N. A., 1850, σ. 340. A. Transon· 1870, σ. 133 καὶ 423· 1894, σ. 215, σημ. τοῦ Auric.—*J. M. E.*, τοῦ Longchamps, 1895, σ. 36, ἄρθρον τοῦ G. Tarry. Ἐπίσης, *Mathesis*, 1890, σ. 217, 219 καὶ *I. d. M.*, 1900, σ. 263, n° 1724, βιβλιογραφία ὑπὸ H. Brocard· 1902, σ. 29, n° 2115, σημ. ὑπὸ E. Duporq (1873-1903), διὰ τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν τοῦ ἐλλειπτικοῦ σφαιριστηρίου.

Διάφορα ζητήματα

Θεώρημα 516—I

1546 α. Χωρὶς τὴν χρῆσιν τῆς ἐννοίας τῶν ἐμβαδῶν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ὕψη ἐπὶ δύο πλευρὰς τριγώνου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν πλευρῶν τούτων. Καὶ ὅτι τὴν αὐτὴν ἰδιότητα ἔχουν καὶ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευράς, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τυχόντος σημείου τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης διαμέσου.



Σχ. 986.

1) Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΡ, ΒΓΠ εἶναι ὅμοια. Ὅθεν:

$$\frac{υ}{λ} = \frac{β}{α}.$$

2) Ἂν x, y αἱ ἀποστάσεις τοῦ ποδὸς Μ τῆς διαμέσου ἀπὸ τῶν πλευρῶν, θὰ εἶναι

$$2x = υ, \quad 2y = λ.$$

Ἄρα:

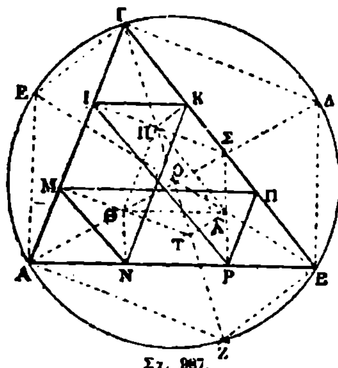
$$\frac{x}{y} = \frac{υ}{λ} = \frac{β}{α}.$$

Παρατήρησις. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ θεωρήματος ἐπὶ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΓΜ, ΒΓΜ εἶναι ἰσοδύναμα καὶ ἑπομένως

$$αx = βy \quad ἢ \quad \frac{x}{y} = \frac{β}{α}.$$

Θεώρημα 516—II

1546 β. Ἀπὸ τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῶν δι' αὐτῶν διαμέτρων τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, λαμβάνομεν μήκη ἴσα ΑΘ, ΒΛ, ΓΗ. Ἔστωσαν δὲ (Ι, Κ), (Μ,Ν), (Ρ, Π) αἱ προβολαὶ τῶν σημείων Η, Θ, Λ ἐπὶ τῶν πλευρῶν (ΓΑ, ΓΒ), (ΑΓ, ΑΒ) καὶ (ΒΑ, ΒΓ) ἀντιστοίχως.



Σχ. 987.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΙΚ, ΜΝ, ΡΠ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ παράλληλοι πρὸς αὐτάς. Καὶ ὅτι τὴν αὐτὴν ἰδιότητα ἔχουν καὶ αἱ διαγώνιοι τοῦ ἑξαγώνου ΚΙ ... Π τῶν ἓξ προβολῶν.

Ἐκ τῶν ὁμοιοθέτων τετραπλεύρων ΓΙΗΚ καὶ ΓΑΖΒ συμπε-

ραίνομεν ἀμέσως ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΙΚ καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλοι, ὡς καὶ ὅτι

$$\frac{ΙΚ}{ΑΒ}=\frac{ΓΗ}{ΓΖ}=\frac{ΒΔ}{ΒΕ}=\frac{ΡΠ}{ΑΓ}.$$

Διὰ τὰς διαγωνίους, εὑρίσκομεν

$$\frac{ΒΝ}{ΒΑ}=\frac{ΒΚ}{ΒΓ}=\text{ἑπομένως πρὸς }\frac{ΝΚ}{ΑΓ}.$$

Ἡ εὐθεῖα ΝΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ τὸ μῆκος της ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ λόγου

$$\frac{ΒΝ}{ΒΑ}=\frac{ΑΡ}{ΑΒ}\text{ κλπ.}$$

Παρατήρησις. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΗΚΛ εἶναι ὁμοιόθετα μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Αἱ κάθετοι ΜΚ, ΠΛ τέμνονται ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΓΟ καὶ εἶναι

$$ΓΤ=ΑΣ.$$

Τόπος 516—III

1546 γ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν μήκη ΑΑ′= ΒΒ′= λ (μεταβλητὸν μῆκος) καὶ ἀμφότερα κατὰ τὰς φορὰς ΓΑ, ΓΒ ἢ ἀμφότερα κατὰ τὰς φορὰς ΑΓ, ΒΓ ἀνιστοίχως.

Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΒ′ καὶ ΒΑ′ τῶν μεταβλητῶν τετραπλεύρων ΑΒΒ′Α′;

Ἐὰν λάβωμεν ΑΓ′= ΒΓ, ΑΓ = ΒΓ″, τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν ἀντιστοίχων τετραπλεύρων εἶναι προφανῶς τὰ σημεῖα Γ′ καὶ Γ″ καὶ ἀνήκουν ἑπομένως ταῦτα εἰς τὸν ζητούμενον τόπον

Λέγω ὅτι ὁ τόπος οὗτος εἶναι ἡ εὐθεῖα Γ′Γ″, παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον ΓΙ τῆς γωνίας Γ καὶ συμπίπτουσα πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Ε τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΒΕ, ἀφοῦ

$$ΓΓ′=ΓΓ″\text{ καὶ }ΑΓ′=ΒΓ=ΑΕ.$$

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Δ τοῦ τόπου ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν ταύτην ΕΓ′. Πράγματι, ἂν Ζ εἶναι ἡ τομὴ τῶν ΕΒ καὶ ΑΒ′, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΖΕ καὶ Β′ΖΒ τὰς σχέχεις:

Σχ. 969

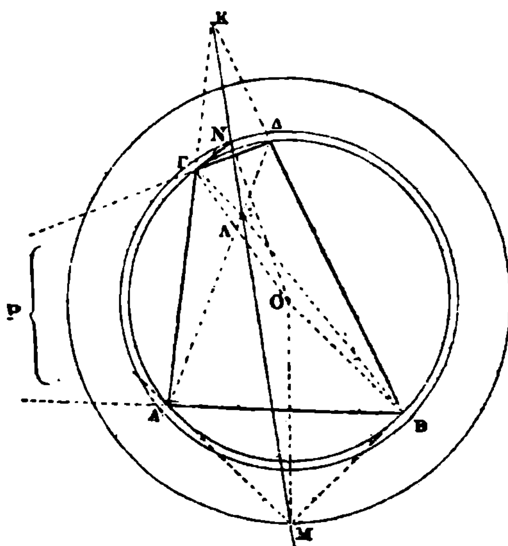
$$\frac{ΕΑ}{ΕΖ}=\frac{ΒΒ'}{ΒΖ}=\frac{ΑΑ'}{ΒΖ}=\frac{ΑΔ}{ΖΔ},$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Δ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Ε.

Παρατήρησις. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ, μέσου τῆς εὐθείας Α'Β', εἶναι εὐθεῖα ΜΝΜ'Ν', παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Γ καὶ διερχομένη διὰ τοῦ μέσου Μ' τῆς εὐθείας ΓΓ'. Ὁ Chasles ἐκάλεσεν αὐτὴν *εὐθεῖαν τῶν μέσων* (§ 1358).

Τόπος 516—IV

1546 δ. Ἐπὶ δοθείσης περιφερείας (Ο) θεωροῦμεν δύο χορδὰς ΑΒ, ΓΔ, σταθερῶν μηκῶν ἀλλὰ μεταβλητῶν θέσεων καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ἑνοῦσαν τὸ σημεῖον τομῆς Κ τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΔΓ μετὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Λ τῶν διαγωνίων τοῦ ἰδίου τετραπλεύρου. Ποῖος ὁ τόπος τῶν τομῶν Μ, Ν τῶν εὐθειῶν ΚΛ μετὰ τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ;



Σχ. 989.

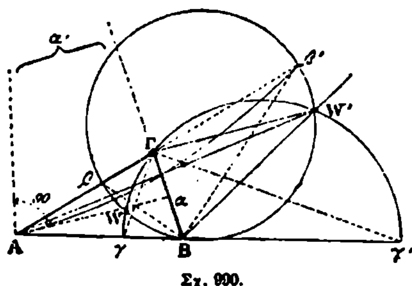
Ἔστω Ρ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ὁ πόλος τῆς εὐθείας ΚΛ, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἀφ' ἑτέρου εὑρίσκονται καὶ οἱ πόλοι τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ οἱ πόλοι τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα Μ, Ν τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα των (Α, Β) καὶ (Γ, Δ) ἀντιστοίχως καὶ κεῖνται, ἑπομένως, ἐπὶ τῶν καθέτων ἐπ' αὐτὰς ΟΜ, ΟΝ, ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα Μ, Ν εἶναι τὰ γράφοντα τὸν ἐν τῇ ἐκφωνήσει ζητούμενον τόπον.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΟΒΜ, ΟΓΝ εἶναι σταθερῶν μεγεθῶν, ἀφοῦ αἱ γωνίαι ΜΟΒ, ΝΟΓ μένουν ἀμετάβλητοι, αἱ ἀποστάσεις ΟΜ, ΟΝ θὰ διατηροῦν σταθερὰ ἐπίσης μεγέθη καὶ οἱ τόποι τῶν ση-

μείων M ἢ N θὰ εἶναι ὁμόκεντροι τῆς δοθείσης (O) περιφέρειαι (*J. M. E.*, 1891, σ. 140).

Θεώρημα 516—V

1546 ε. **Αἱ τρεῖς περιφέρειαι τοῦ Ἀπολλωνίου παντὸς τριγώνου ἔχουν κοινὴν χορδήν.**



Σχ. 900.

Ἡ περιφέρεια τοῦ Ἀπολλωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ἡ σχετικὴ πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ αὐτοῦ, εἶναι ἡ ἔχουσα διάμετρον τὴν ἀπόστασιν τῶν ποδῶν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ταύτης τῶν διχοτόμων τῆς γωνίας Γ.

Ἔστωσαν (α, α'), (β, β'), (γ, γ') οἱ πόδες τῶν διχοτόμων ἐπὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ καὶ W, W' τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν περιφερειῶν τῶν γραφομένων μὲ διαμέτρους τὰς $\beta\beta'$ καὶ $\gamma\gamma'$. Θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$\frac{WA}{WB} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{WB}{W\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$$

καὶ ἑπομένως τὴν

$$\frac{WA}{W\Gamma} = \frac{\gamma}{\alpha},$$

ἥτις δεικνύει ὅτι τὸ σημεῖον W, καὶ ἀναλόγως καὶ τὸ W', ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον $\alpha\alpha'$.

Παρατηρήσεις. 1) Τὰ σημεῖα W, W' ὀνομάζονται *κέντρα ἰσοδυναμικὰ* τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἕνεκα τῶν ἰσοτήτων :

$$\alpha \cdot WA = \beta \cdot WB = \gamma \cdot W\Gamma \quad \text{καὶ} \quad \alpha \cdot W'A = \beta \cdot W'B = \gamma \cdot W'\Gamma.$$

Αἱ ἀποστάσεις ἑκάστου αὐτῶν ἀπὸ τῶν κορυφῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν :

$$WA : WB : W\Gamma = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma}.$$

2) Ἡ εὐθεῖα WW' διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιφερείας.

3) Ἡ πολικὴ ἑκάστου τῶν σημείων W, W' πρὸς τὴν περιφέρειαν (ΑΒΓ) διέρχεται διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων τούτων.

Σημειώσεις. 1) Ἐκ τῶν προτάσεων τῆς ἀνωτέρω Παρατηρήσεως, ἡ 1) εὑρίσκεται εἰς τὰ *A. d. Gergonne*, τόμ. XX (1829 - 1830), σ. 306· Wallés. Διὰ τὴν 2) καὶ 3), βλ. *J. M. E.*, τοῦ Vuibert (15 Μαρτίου 1899, σ. 94, n° 4520).

Ἡ ὀνομασία *ἰσοδυναμικὰ κέντρα* ὀφείλεται εἰς τὸν Neuberg (*Mathesis*, 1885, σ. 204, παραπομπή). Διὰ τὴν σπουδὴν τῶν σημείων τούτων, βλ. *J. d. M. El.*, τοῦ Longchamps, ἄρθρα τῶν Boutin (1889, σ. 99, 123, 152, 180), Bernés (1893, σ. 3, 25, 49, 76) καὶ σημείωσιν τοῦ Neuberg (1889, σ. 212, n° 2). Σχετικῶς, ὑπάρχει καὶ τὸ ἀκόλουθον Θεώρημα :

Αἱ περιφέρειαι τοῦ Ἀπολλωνίου ἑνὸς τριγώνου τέμνονται ἀνὰ δύο κατα γωνίαν ἴσην πρὸς 120° (Lemoine, *Mathesis*, 1902, σ. 147, ζτμ. 1329).

2) Τὸ ἀντίστροφον τοῦ *Θεωρήματος τοῦ Brocard* (§ 1342, ξ, Παρατήρησις), παρουσιάζει ἀναλογίαν τινὰ μετὰ τοῦ προηγουμένου τῶν *περιφερειῶν τοῦ Ἀπολλωνίου*. Ἰδοὺ ἡ γενική του διατύπωσις:

Ἔστω Α'Β'Γ' *διατέμνουσα τοῦ τριγώνου* ΑΒΓ. *Αἱ περιφέρειαι μὲ διαμέτρους* ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' *τέμνονται εἰς δύο σημεῖα, πραγματικὰ ἢ φανταστικά.*

Πρόκειται δηλ. περὶ τοῦ γνωστοῦ Θεωρήματος:

Αἱ περιφέρειαι μὲ διαμέτρους τὰς διαγωνίους ἑνὸς πλήρους τετραπλεύρου, ἔχουν τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἄξονα (N. A., 1862, σ. 17).

Θεώρημα 516—VI

1546 ζ. 1) Ἔστωσαν ΑΒΓ, Α'Β'Γ' δύο σχήματα εὐθέως ὅμοια (σχ. 980, σ. 712). Αἱ περιφέρειαι τοῦ Ἀπολλωνίου, αἱ μὲ διαμέτρους ΜΜ' κλπ. ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' κλπ. τῶν ἑνουσῶν ὁμολόγους κορυφάς, καθὼς καὶ αἱ περιφέρειαι τοῦ Ἀπολλωνίου, ὡς αἱ ΡΠ, Ρ'Π', αἱ σχετικαὶ πρὸς ἑκάστην πλευρὰν τῶν δύο σχημάτων, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ.

2) Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς περιφερείας τοῦ Miquel, ὡς αἱ (ΑΑ'Δ'), (ΒΒ'Δ'), ὅταν τὸ τετράπλευρον ΑΒΒ'Α' δύο ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι κυρτὸν (μόνην ἄλλωστε περίπτωσιν ἣν ἐξετάζομεν).

Τὰ ἀνωτέρω εἶναι φανερὰ κατὰ τὴν πρότασιν τῆς παραγράφου 1527: πᾶσαι αἱ περιφέρειαι αὗται διέρχονται ἐκ τοῦ διπλοῦ σημείου Σ τῶν δύο εὐθέως ὁμοίων σχημάτων.

Διὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ', ὑπάρχουν ἐννέα περιφέρειαι τοῦ *Ἀπολλωνίου* καὶ ἐννέα τοῦ *Miquel*.

Αἱ ἐννέα περιφέρειαι τοῦ Miquel καὶ αἱ δύο διχοτόμοι, αἱ σχετικαὶ πρὸς ἑκάστην αὐτῶν (ὡς αἱ ΜΕ, Μ'Ε' Σχ. 980), δίδουν 8 διαφόρους κατασκευάς. Ἀφ' ἑτέρου, λαμβάνοντες τὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ἀνὰ δύο ΒΓ, Β'Γ' λ. χ., καθὼς καὶ τὰς εὐθείας ΒΒ', ΓΓ' εὑρίσκομεν δώδεκα ἐν συνόλῳ τόπους - εὐθείας τῶν *ἀναλόγων ἀποστάσεων* ἢ τῶν *ἀναλόγων διαιρέσεων* (§ 1527, 3ος τρόπος). Ὑπάρχουν, ἑπομένως, δέκα ὀκτὼ περιφέρειαι καὶ δώδεκα εὐθεῖαι (ἐκτὸς τῶν διχοτόμων), διερχόμεναι πᾶσαι διὰ τοῦ σημείου Σ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ τριάκονται αὗται γραμμαὶ συνδυάζονται κατὰ

$$\binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$$

διαφόρους τρόπους, ἕπεται ὅτι ὑπάρχουν $435 + 18 = 453$ διακεκριμέναι κατασκευαὶ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου Σ (σχ. 980).

Θεώρημα τοῦ Sylvester 516—VII

1546 η. Ἡ εὐθεῖα ΟΗ, ἡ συνδέουσα τὸ κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η αὐτοῦ, εἶναι ἡ συνισταμένη τριῶν ἴσων δυνάμεων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ.

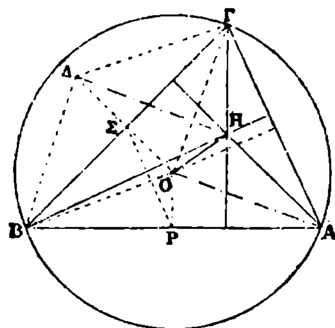
Γνωρίζομεν ὅτι $ΓΗ = 2 . ΟΡ$ (§ 723) καὶ ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΗΑ καὶ ΡΟΣ εἶναι ὅμοια· ἐπειδὴ δὲ $ΑΓ = 2 . ΡΣ$, θὰ εἶναι

$$ΑΗ = 2 . ΟΣ, \quad ΓΗ = 2 . ΟΡ.$$

Ἔστω Δ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ο πρὸς τὴν ΒΓ. Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΒΟΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ ΟΔ εἶναι συνισταμένη τῶν ἴσων δυνάμεων ΟΒ καὶ ΟΓ. Ἀφ' ἑτέρου, καὶ τὸ ΟΔΗΑ εἶναι ἐπίσης παραλληλόγραμμον, ἀφοῦ

ΑΗ = 2 . ΟΣ = ΟΔ.

Εἶναι, κατὰ συνέπειαν, ἡ ΟΗ συνισταμένη τῶν δυνάμεων ΟΔ καὶ ΟΑ, δηλ. συνισταμένη τῶν τριῶν ἴσων δυνάμεων ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ.



Σχ. 991

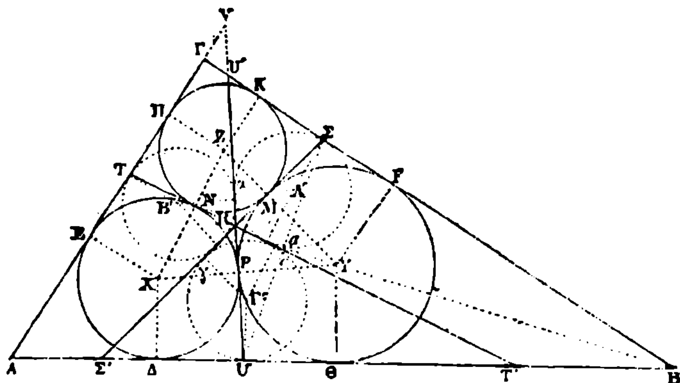
Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἐπιδέχεται τὴν ἀκόλουθον γενίκευσιν :

Ἔστω Ο *τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου* ΑΒΓ *καὶ* Α', Β', Γ' *τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Διὰ τῶν κορυφῶν* Α, Β, Γ *φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς* ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ'. *Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον* Η *καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα* ΟΗ *εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν δυνάμεων* ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ.

Ἡ γενίκευσις αὕτη ἀνήκει εἰς τὸν Gerono (N. A. M., 1883, σ. 525).

Πρόβλημα τοῦ Malfatti 516—VIII

1546 θ. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἐγγραφοῦν εἰς αὐτὸ τρεῖς περιφέρειαι (Χ), (Υ), (Ζ) τοιαῦται, ὥστε ἑκάστη αὐτῶν νὰ ἐφάπτεται τῶν δύο ἄλλων καὶ δύο τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.



Σχ. 992.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ διὰ τῶν ἑπομένων ἐπαγωγικῶν συλλογισμῶν, φθάνομεν εἰς τὴν δικαιολόγησιν τῆς κατασκευῆς, τῆς ἀναφερομένης εἰς τὸ τέλος τῆς σπουδῆς τοῦ προβλήματος καὶ τὴν ὁποίαν ὑπέδειξε ὁ Steiner ἄνευ ἀποδείξεως.

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι αἱ ἐσωτερικαὶ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν (X), (Y), (Z) τέμνονται εἰς τὸ ριζικὸν κέντρον R αὐτῶν (§ 1271 α).

Ἔστωσαν Δ, Ε, Ζ, Θ, Η, Κ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου.

1) Τὸ σημεῖον U, τομὴ τῆς URU' καὶ τῆς ΑΒ, εἶναι τὸ σημεῖον ὅπου ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον Σ'RT' περιφέρεια (Γ') ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς Σ'Τ'. Πράγματι,

$$U\Theta = UP = U\Delta, \quad \Delta T' = NT', \quad \Theta\Sigma' = M\Sigma', \quad RM = RN.$$

καὶ ἑπομένως:

$$UT' - U\Sigma' = \Delta T' - \Theta\Sigma' = NT' - M\Sigma' = RT' - R\Sigma',$$

δηλ. τὸ σημεῖον U ἔχει τοιαύτην θέσιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Σ'Τ', ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς κορυφὰς Τ', Σ' τοῦ τριγώνου RΤ'Σ' νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν πλευρῶν RΤ' καὶ RΣ' αὐτοῦ· ἡ δὲ ἰδιότης αὕτη χαρακτηρίζει τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τρίγωνον μετά τινος πλευρᾶς (§ 743, 4)).

2) Ἀναλόγως, αἱ ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰ τρίγωνα τῶν εὐθειῶν (RT', RU', ΒΓ) καὶ (RΣ' RU', ΑΓ) περιφέρειαι (Α'), (Β'), ἐφάπτονται τῶν ΒΓ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Σ καὶ Τ ἀντιστοίχως.

3) Θεωροῦντες τὸ σύστημα τῶν τριῶν περιφερειῶν (Α'), (Β') καὶ (Ζ), ἀναγνωρίζομεν, ὅτι δύο τῶν ἐξωτερικῶν κοινῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν, αἱ ΣΣ' καὶ ΤΤ', καὶ μία τῶν ἐσωτερικῶν κοινῶν ἐφαπτομένων, ἡ UU', διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου R. Ἑπομένως (§ 758), ἡ δευτέρα κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν (Α') καὶ (Β') διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Γ, καθ' ἣν τέμνονται αἱ κοιναὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι ΒΓ καὶ ΑΓ.

4) Ἔστωσαν α, γ τὰ σημεῖα καθ' ἃ αἱ UU', ΣΣ' ἐφάπτονται τῶν περιφερειῶν (Α'), (Γ'), ἀντιστοίχως. Θὰ ἔχωμεν

$$U\alpha = \Sigma\gamma.$$

Πράγματι,

$$PU = \Theta U = \Sigma'\Theta - \Sigma'U = \Sigma'M - \Sigma'\gamma = M\gamma$$

καὶ

$$P\alpha = U'P - U'\alpha = U'Z - U'\Sigma = \Sigma Z = \Sigma M.$$

Ἑπομένως,

$$UP + P\alpha\,(= U\alpha) = \Sigma M + M\gamma\,(= \Sigma\gamma).$$

5) Ἡ ἐφαπτομένη Uα τῆς περιφερείας (Α') εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν UΣ καὶ Uα, ὅπου α ἡ δευτέρα τομὴ τῶν UΣ καὶ (Α'). Ἐπίσης, ἡ Σγ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΣU καὶ Σγ· ἐπειδὴ δὲ Uα = Σγ, ἕπεται (§ 1259 β).

$$\Sigma\alpha = U\gamma.$$

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα UΣ ὁρίζει ἴσας χορδὰς εἰς τὰς περιφερείας (Α') καὶ (Γ'), φαίνονται αὗται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ἐκ τῆς κορυφῆς Β (§ 1259 α). Καὶ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ δευτέρα κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν (Α') καὶ (Γ') εἶναι ἡ διχοτόμος ΒΥ τῆς γωνίας Β.

Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ ἀκόλουθος κατασκευὴ κατὰ Steiner:

«Τοῦ R ὄντος κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐγγράψατε εἰς τὰ τρίγωνα ΒRΓ, ΓRΑ, ΑRΒ πε-

ριφερείας (Α'), (Β'), (Γ'). Φέρατε τῶν περιφερειῶν τούτων, ἀνὰ δύο λαμβανομένων, τὰς κοινὰς ἐφαπτομένας ΣΣ' ΤΤ', UU'.

Σχηματίζονται οὕτω τρία τρίγωνα ΑΤΤ', ΒUU', ΓΣΣ', ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει δύο πλευρὰς κειμένας ἐπὶ δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὴν τρίτην ἐπὶ μιᾶς τῶν ἐφαπτομένων. Αἱ ἐγγεγραμμέναι περιφέρειαι εἰς τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι αἱ ζητούμεναι».

1546ι. ***Σημείωσις.*** Τὸ *πρόβλημα τοῦ Malfatti*, ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ Ἰταλοῦ γεωμέτρου (1731 - 1807) καὶ τὸ ὁποῖον ἔδωσε εἰς δημοσιότητα τὸ 1803, προετάθη εἰς τὰ *Annales de Gergonne* εἰς τὸν Α'. τόμον αὐτῶν (1810 - 1811, σ. 196) καὶ ἐλύθη ἀναλυτικῶς εἰς τὸν ἴδιον τόμον, σ. 343, ὑπὸ τῶν συντακτῶν τοῦ περιοδικοῦ τούτου J. - D. Gergonne καὶ J. - E. Thomas Lavernède.

Ἡ *πολὺ ἁπλῆ* λύσις, ἡ δοθεῖσα ὑπὸ τοῦ ἰδίου τοῦ Malfatti, ἀνεκοινώθη εἰς τὰ *Annales* ὑπὸ τοῦ Bidone, καθηγητοῦ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Τουρίνου (τόμ. I, σ. 347), ἀλλ' ἄνευ τῆς ἀποδείξεώς της. Ὁ Gergonne ὑποδεικνύει ὅτι δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν 32 ἐν γένει λύσεις (σ. 348).

Τὸ πρόβλημα ἐπανατίθεται εἰς τὸν II τόμον (σ, 60 καὶ 65) καὶ ἐπίσης εἰς τὸν X τόμον, ὅπου καὶ λύεται ὑπὸ τοῦ Lechmuz. Ἡ λύσις αὕτη, ἁπλοποιημένη ὑπὸ τοῦ Catalan, εὑρίσκεται καὶ εἰς τὰ N. A., τόμ. V, 1846, σ. 60.

Εἰς τὸν τόμον VI, 1847, σ. 346, ἀναφέρεται ἡ γεωμετρικὴ λύσις τοῦ Steiner· ἡ ἀπόδειξις εἶναι τοῦ Zornow, καθηγητοῦ εἰς Καίνιγκσμπεργκ (1833). Ὁ τόμος VIII, 1849, σ. 22, ἀναγγέλλει μίαν ἀπόδειξιν ἀλγεβρικὴν τοῦ C. Adams καὶ εἰς τὸν τόμον XII, 1853, σ. 131 παρατίθεται ἡ τριγωνομετρικὴ λύσις τοῦ Schelbach.

Ὁ G. Ritt εἰς τὰ *Problèmes de Géométrie élémentaire* αὐτοῦ δίδει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ Malfatti (σ. 322, problème 214). Ἐπίση ὁ Housel εἰς τὴν *Introduction à la Géométrie supérieure* αὐτοῦ (1865, σ. 144). Κατὰ τὸν Catalan, ὁ Hart ἔδωσεν ἀργότερον τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ Μ., τὴν ὁποίαν ὁ Catalan παραθέτει εἰς τὰ *Théorèmes et Problèmes de Géométrie* (6η ἔκδοσις, σ. 258) αὐτοῦ.

Ὁ Deshoves εἰς τὰ *Questions de Géométrie* (2α ἐκδ., σ. 360, n° 18) καὶ ὁ Rouché εἰς τὸ *Traité de Géométrie* (7η ἐκδ. 1900, α' μέρος, σ. 311, n° 407) ἐπανέρχονται ἐπὶ τῆς ἀποδείξεως τοῦ Hart καὶ ἀναπτύσσουν αὐτήν. Ὁ δὲ Pelletreau ἐπελήφθη τοῦ ἰδίου προβλήματος κατὰ πρωτότυπον καὶ ἀξιοσημείωτον τρόπον (A. F., 1888, Oran, σ. 99 ἕως 103).

Εἰς τὸ *Bulletin de M. E.* τῶν Gérard καὶ Michel (1900, σ. 209, 207 δίδεται ὑπὸ G. Fontené καὶ Gérard, μία πλήρης σπουδὴ τοῦ ζητήματος. Οὐχ' ἧττον, ὠφέλιμος εἶναι καὶ ἡ ἀνάγνωσις τοῦ ἄρθρου τοῦ E. - N. Barisien εἰς τὰ N. A., 1902, σ. 441 καὶ 499.

Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τῆς ὑπὸ τοῦ ἰδίου τοῦ Malfatti δοθείσης κατασκευῆς μένει ἀκόμη πρὸς ἔρευναν (*A. d. G.*, τόμ. I, σ. 347). Παριστῶντες διὰ τ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ τριγώνου, διὰ ρ τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας (R) καὶ διὰ α', β', γ' τὰς ἀποστάσεις RA, RB, RΓ, ἡ κατασκευὴ αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ λάβωμεν

$$2 . \mathrm{A\Delta} = \tau - \rho + \alpha' - \beta' - \gamma'$$

καὶ ἑπομένως

$$\Delta\mathrm{X} = \frac{\rho(\tau - \rho + \alpha' - \beta' - \gamma')}{2(\tau - \alpha)}.$$

Πρόβλημα 516—IX

1546 κ. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου καὶ τοῦ σημείου τοῦ Gergonne N, καθ' ὃ τέμνονται αἱ ἑνοῦσαι τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου μετὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς εὐθεῖαι.

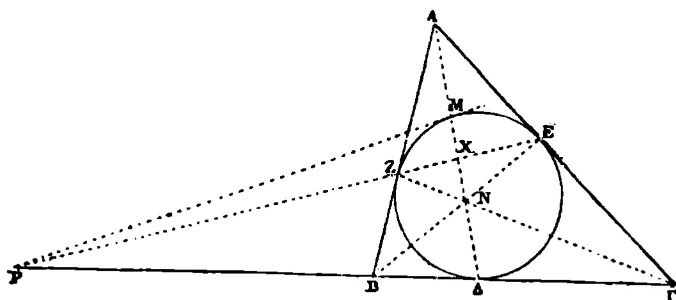
Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον. Ἂς λάβωμεν, πράγματι, ἓν τυχὸν σημεῖον Δ ὡς σημεῖον ἐπαφῆς (σχ. 993)· ὁρίζονται οὕτω αἱ διευθύνσεις τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τῆς εὐθείας ΔΝΜΑ.

Πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἄλλων κορυφῶν, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πόλος Ρ τῆς εὐθείας ΔΝΑ εἶναι τελείως ὡρισμένος. Εἶναι ἑπομένως, τὸ τρίγωνον κατασκευάσιμον ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν λύσιν τοῦ ἀκολούθου προβλήματος:

Πρόβλημα 516—X

1546 λ. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου, τοῦ σημείου τοῦ Gergonne N καὶ ἑνὸς τῶν σημείων ἐπαφῆς Δ.

Ἀλγεβρικὴ λύσις. Τὰ σημεῖα Δ, Ν ὁρίζουν τὴν χορδὴν ΔΜ, ἄρα καὶ τὸν πόλον αὐτῆς Ρ. Τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὴν ἀγωγὴν εὐθείας ΡΖΧΕ τοιαύτης, ὥστε αἱ διαγώνιοι ΒΕ, ΓΖ τοῦ τετραπλεύρου ΕΖΒΓ νὰ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Ν, ἢ τοιαύτης, ὥστε



Σχ. 993

ἡ ΔΧ νὰ διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν Ν καὶ Α καὶ ἡ ΔΜ ὑπὸ τῶν Χ καὶ Α.

Ἂς θέσωμεν: $ΔΜ = \mu$, $ΔΝ = \nu$, $ΔΧ = x$ καὶ $ΔΑ = y$.

Αἱ σχέσεις $(ΔΧΝΑ) = -1$, $(ΔΜΧΑ) = -1$ γράφονται ἀντιστοίχως:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{y}, \quad \frac{2}{\mu} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὐκόλως συνάγομεν

$$x = \frac{3\mu\nu}{2\nu + \mu}, \quad y = \frac{3\mu\nu}{4\nu - \mu},$$

μήκη εὐκόλως κατασκευαζόμενα.

1546 μ. *Δευτέρα λύσις*. Γνωρίζομεν τὰ σημεῖα Δ, Ν, Μ, Ρ. Φέρομεν διὰ τοῦ Ρ τέμνουσαν τυχοῦσαν ΡΖΧΕ. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ Ε, Ζ τέμνουν τὴν σταθερὰν ἐφαπτομένην ΡΔ εἰς τὰ Β καὶ Γ, ἔστωσαν δὲ Β′, Γ′ αἱ τομαὶ τῆς ΡΔ μετὰ τῶν ΝΕ καὶ ΝΖ εὐθειῶν. Ἕνεκα τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΝΖ, τὰ σημεῖα Β, Β′ καὶ Γ, Γ′ εἶναι ὁμόλογα σημεῖα μιᾶς ἐνελίξεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν ἐπίσης καὶ τὰ σημεῖα Ρ καὶ Δ.

Σχ. 994.

Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ θέσις τῆς τεμνούσης ΡΧ, τοιαύτη ὥστε τὰ σημεῖα (Β, Β′) ὡς καὶ τὰ (Γ, Γ′) νὰ συμπίπτουν, ἤ, μὲ ἄλλας λέξεις, νὰ εὑρεθοῦν τὰ *διπλᾶ σημεῖα* U, V τῆς ἐνελίξεως τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν τριῶν ζευγῶν ὁμολόγων, ἐν αὐτῇ, σημείων (Β, Β′) (Γ, Γ′) καὶ (Ρ, Δ).

Τὰ σημεῖα ταῦτα εὐκόλως κατασκευάζονται, ἐπειδὴ εἶναι τὰ ἁρμονικῶς διαιροῦντα τὰ ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ καὶ ἑπομένως καὶ τὸ τμῆμα ΡΔ.

Αἱ ἐκ τῶν U, V ἐφαπτόμεναι τῆς δοθείσης περιφερείας ὁρίζουν τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ εἶναι *ἐγγεγραμμένον* ἢ *παρεγγεγραμμένον* εἰς τὴν περιφέρειαν, ἀναλόγως τῶν δεδομένων.

1546 ν. *Τρίτη λύσις*. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΡΔ (σχ. 995) ἂς λάβωμεν μήκη ΔΔ′ = Δ′Δ″ = ΡΔ.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΡΝ καὶ ΜΔ″, τεμνομένας εἰς Χ′. Διὰ τοῦ σημείου Χ′ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΡΔ καὶ μέχρι τοῦ σημείου Χ καθ' ὃ αὕτη συναντᾷ τὴν χορδὴν ΔΜ.

Ἡ τέμνουσα ΡΖΧΕ λύει τὸ πρόβλημα.

Ὑποθέσωμεν πράγματι τοῦτο λελυμένον καὶ διὰ τῶν Μ καὶ Χ ἂς φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΡΔ, τεμνούσας, ἡ πρώτη τὴν ΡΧ εἰς Μ′ καὶ ἡ δευτέρα τὴν ΡΝ εἰς Χ′. Τὰ σημεῖα ταῦτα, Μ′ καὶ Χ′, ἀνήκουν εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΔ′, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εἶναι μέσον τῆς ΡΔ′ καὶ τὰ σημεῖα Α, Χ διαιροῦν ἁρμονικῶς τὸ τμῆμα ΜΔ, ἐνῷ τὰ σημεῖα Α, Ν εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Χ καὶ Δ.

Ἔστω ΜΔΔ′Η τὸ ἐπὶ τῶν ΜΔ, ΔΔ′ παραλληλόγραμμον καὶ Ο τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς του ΗΔ′. Ἡ διαίρεσις (Δ′Μ′Χ′Α) εἶναι ἁρμονική, ὡς ἡ (ΔΜΧΑ), καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν τετράδα εὐθειῶν Μ (Δ′Μ′Χ′Α)· εἶναι ἄρα ἡ τετρὰς τῶν σημείων

(Δ', Η, Ο, ∞) ἁρμονική, τὸ σημεῖον Ο μέσον τοῦ τμήματος Δ'Η καὶ ἡ εὐθεῖα ΜΟ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Δ''.

Κατὰ ταῦτα, διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, φέρομεν τὴν ΜΔ'', ὁρίζομεν τὴν τομήν της Χ' ὑπὸ τῆς ΡΝ καὶ ἐκ τοῦ Χ' φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΡΔ, τέμνουσαν τὴν ΔΝ εἰς Χ.

Σχ. 995.

Ἡ κορυφὴ Α τοῦ ζητουμένου τριγώνου εἶναι ὁ πόλος τῆς εὐθείας ΡΧ κλπ.

(*Ἐν γένει, τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ'' δὲν συμπίπτουν καὶ ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν ἀντιστοίχων θέσεών των).*

1548 ξ. Διερεύνησις. Ἐὰν δοθοῦν ἡ περιφέρεια καὶ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ρ, εἶναι εὔκολον νὰ παρακολουθήσωμεν τὰς μεταβολὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰς ἀντιστοίχους τῶν θέσεων τοῦ σημείου Ν τοῦ Gergonne ἐπὶ τῆς σταθερᾶς χορδῆς ΔΜ.

Ὑπάρχουν δύο ἀξιοσημείωτοι θέσεις τῆς τεμνούσης ΡΖΧΕ≡(ε).

Ὅταν ἡ (ε) συμπίπτῃ πρὸς τὴν διάμετρον Ρα (σχ. 996), ἡ κορυφὴ Α εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθείας ΥΖ, τὸ δὲ σημεῖον τοῦ Gergonne εἶναι εἰς Ι.

Ἐὰν (ε)≡Ρβ, ὅπου β τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ἐφαπτομένης Κβ

Σχ. 996.

παραλλήλου πρὸς τὴν ΡΔ, ἡ κορυφὴ Α εὑρίσκεται εἰς Κ καὶ τὸ σημεῖον τοῦ Gergonne εἰς Λ.

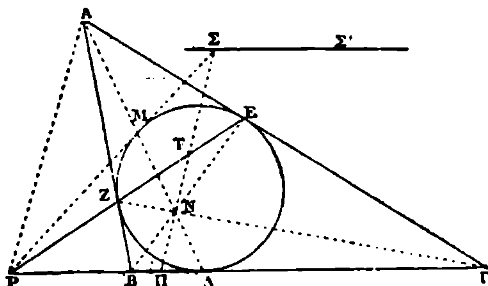
Ὅταν τὸ σημεῖον τοῦ Gergonne Ν γράφῃ τὸ τμῆμα ΔΙ, ἡ κορυφὴ Α κινεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΔΖ, ἡ δὲ περιφέρεια μένει *παρεγγεγραμμένη* εἰς τὸ τρίγωνον καὶ εἰς τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ.

"Οταν τὸ Ν γράφῃ τὸ τμῆμα ΙΛ, ἡ κορυφὴ Α κινεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΥ, ἡ δὲ περιφέρεια μένει ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον. "Οταν τὸ Ν γράφῃ τὸ τμῆμα ΛΜ, ἡ κορυφὴ Α κινεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος ΚΜ καὶ ἡ περιφέρεια εἶναι παρεγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον καὶ εἰς τὴν γωνίαν Γ αὐτοῦ.

1546 ο. *Τετάρτη λύσις.* Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον. Ἡ χορδὴ ΔΝΜ ὁρίζει τὸν πόλον αὐτῆς Ρ καὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας εἰς Μ.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΡΑ καὶ ἐκ τοῦ Ν τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὴν ΠΝΤΣ.

Ἡ τετρὰς τῶν εὐθειῶν Ρ(Δ, Μ, Τ, Α) εἶναι ἁρμονικὴ καὶ Τ,



Σχ. 997.

ἑπομένως, τὸ μέσον τῆς ΠΣ. Ἐπίσης ἡ τετρὰς Ρ(ΔΤΝΑ) εἶναι ἁρμονικὴ καὶ Ν τὸ μέσον τῆς ΠΤ.

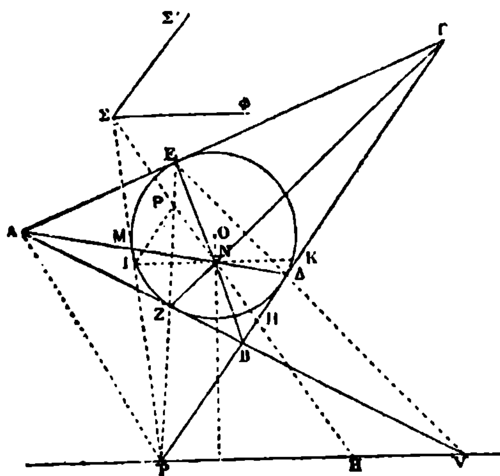
Εἶναι κατ' ἀκολουθίαν τὸ τμῆμα ΠΣ *τετραπλάσιον* τοῦ ΠΝ καὶ τὸ σημεῖον Σ κατασκευάσιμον, ἀφοῦ θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΡΜ καὶ εὐκόλως εὑρισκομένης (§ 94 ἢ 1411) εὐθείας ΣΣ', παραλλήλου πρὸς τὴν ΡΔ.

Μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ σημείου Σ καὶ τῆς εὐθείας ΝΣ, ἡ ἐκ τοῦ Ρ παράλληλος πρὸς αὐτὴν τέμνει τὴν ΔΝ εἰς τὴν κορυφὴν Α τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

1546 π. *Πέμπτη λύσις.* Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμένον πάλιν καὶ φέρομεν τὴν ΡΑ (Σχ. 998), ὡς καὶ τὴν ἐκ τοῦ Ν παράλληλον ΠΝΡΣ πρὸς αὐτήν. Ὡς εἴδομεν τὸ σημεῖον Ν εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΠΡ καὶ τὸ Ρ μέσον τοῦ ΠΣ.

Κατασκευάζομεν τὴν *πολικὴν* ΡΗ τοῦ σημείου Ν καὶ φέρομεν πρὸς αὐτὴν τὴν ἐκ τοῦ Ν παράλληλον ΙΝΚ. Ἡ τετρὰς τῶν εὐθειῶν Ρ(ΙΚΝΗ) εἶναι προφανῶς ἁρμονικὴ καὶ τὸ σημεῖον Ν μέσον τοῦ τμήματος ΙΚ. Ἐπομένως, τὸ τετράπλευρον ΙΡΚΠ εἶναι παραλληλόγραμμον, τὸ σημεῖον Ι μέσον τοῦ τμήματος ΡΣ (ἀφοῦ Ρ = μέσον τοῦ ΠΣ) καὶ τὸ σημεῖον Ν μέσον τοῦ ΗΣ.

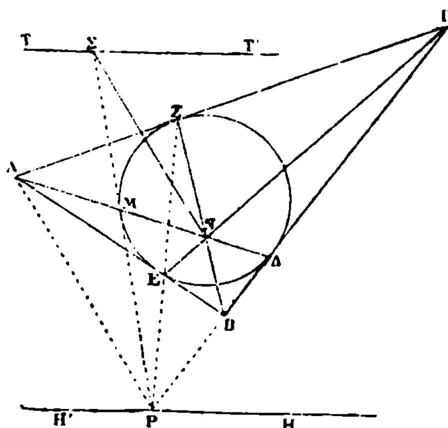
Τὸ σημεῖον Σ κατασκευάζεται εὐκόλως, ὡς τομὴ τῆς ἐφαπτομένης ΡΜ καὶ τῆς γνωστῆς εὐθείας ΣΦ (συμμετρικῆς πρὸς Ν τῆς πολικῆς ΡΗ). Ἡ δὲ τομὴ τῆς εὐθείας ΔΝΜ καὶ τῆς ἐκ τοῦ Ρ παραλλήλου πρὸς τὴν ΝΣ, ὁρίζει τὴν κορυφὴν Α τοῦ ζητουμένου τριγώνου.



Σχ. 998.

Θεώρημα 516—XI

1546 ρ. Δοθείσης περιφερείας, ὑπάρχει ἀπειρία τριγώνων περιγεγραμμένων εἰς αὐτὴν καὶ ἐχόντων ὡς σημεῖον Gergonne δοθὲν σημεῖον N.



Σχ. 999.

Λαμβάνομεν, πράγματι, ἓν τῶν τριγώνων τούτων, ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῆς προηγουμένης λύσεως. Κατασκευάζομεν πρῶ-

τον τὴν πολικὴν Η'Η (σχ. 999) τοῦ σημείου Ν, φέρομεν τὴν συμμετρικὴν αὐτῆς ΤΤ' πρὸς τὸ σημεῖον Ν.

Ἐκ τυχόντος, ἀκολούθως, σημείου Ρ τῆς ΗΗ' φέρομεν ἐφαπτομένας ΡΔ, ΡΜ πρὸς τὴν περιφέρειαν. Ἂν Σ εἶναι ἡ τομὴ τῆς δευτέρας εὐθείας μετὰ τῆς ΤΤ', ἡ ἐκ τοῦ Ρ παράλληλος πρὸς τὴν ΝΣ τέμνει τὴν ΔΝ κατὰ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς ἐκ τῶν ζητουμένων τριγώνων. Αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΒ, ΑΓ, συμπληροῦν τὸ τρίγωνον.

Ὅταν ἡ *κινητὴ* εὐθεῖα ΡΜΣ *κυλίεται* ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας, τὰ Ρ καὶ Σ γράφουν τὰς σταθερὰς εὐθείας Η'Η καὶ Τ'Τ, αἱ εὐθεῖαι ΝΣ, ΔΝΜ στρέφονται περὶ τὸ σημεῖον Ν, ἡ εὐθεῖα ΡΑ μένει παράλληλος πάντοτε πρὸς τὴν ΝΣ, κλπ.

1546 α. *Παρατήρησις*. Ἡ προηγουμένη πρότασις συμπληροῦται ὡς ἀκολούθως:

1) *Τὰ τρίγωνα, τὰ περιγεγραμμένα εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν* (Ο) (σχ. 1000) *καὶ ἔχοντα τὸ αὐτὸ σημεῖον Gergonne* Ν, *εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν αὐτὴν κωνικὴν τομήν. Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι ὁμόλογος* (§ 1249, Σημείωσις) *τῆς περιφερείας* (Ο), *ἐν τῇ ὁμολογίᾳ μὲ κέντρον* Ν *καὶ ἄξονα τὴν πολικὴν* ΡΡ' *τοῦ σημείου* Ν *πρὸς τὴν περιφέρειαν* (Ο).

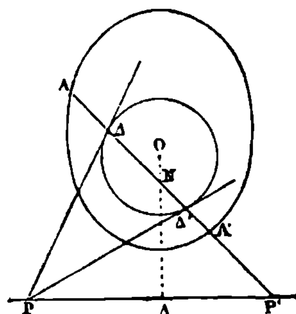
Εἰς πᾶν σημεῖον Ρ τῆς πολικῆς ταύτης ἀντιστοιχοῦν δύο τρίγωνα, τὰ ἔχοντα βάσεις ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων ΡΔ, ΡΔ' καὶ κορυφὰς Α, Α' ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ Ρ εὐθείας Ρ'ΔΔ'.

Συμφώνως πρὸς γνωστὴν κατασκευὴν (§ 1546, *πέμπτη λύσις*), τὸ σημεῖον Α εἶναι τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Ν πρὸς τὸ τμῆμα ΔΡ' καὶ τὸ Α' τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Ν πρὸς τὸ τμῆμα Δ'Ρ'. Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως:

$$(\text{ΝΑΔΡ}') = (\text{ΝΑ}'\text{Δ}'\text{Ρ}') = -1,$$

ἐκ τῶν ὁποίων σχέσεων εὑρίσκομεν

$$(\text{ΝΡ}'\text{ΔΑ}) = (\text{ΝΡ}'\text{Δ}'\text{Α}') = \frac{1}{2} = \text{σταθ.}$$



Σχ. 1000.

Ὅταν ἡ εὐθεῖα ΝΡ' στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον Ν, τὸ τμῆμα ΝΡ' διαιρεῖται ὑπὸ τῶν σημείων (Δ, Α) ἢ (Δ', Α') κατὰ σταθερὸν ἀναρμονικὸν λόγον.

Τὰ σημεῖα Α, Α' γράφουν, ἑπομένως, κωνικὴν τομὴν καὶ τὰ περιγεγραμμένα τρίγωνα εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο), τὰ ἔχοντα πάντα τὸ αὐτὸ σημεῖον Gergonne Ν, μένουν ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν κωνικὴν ταύτην τομήν, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν.

2) *Εἰς πᾶν σημεῖον* Ρ *τῆς πολικῆς τοῦ σημείου* Ν, *ἀντιστοιχοῦν δύο ἐκ τῶν τριγώνων αὐτῶν* ΑΒΓ, Α'Β'Γ', *ἔχοντα τὰς αὐτὰς «ceviennes» τοῦ Gergonne* ΑΑ'ΝΡ', ΒΒ'ΝΠ', ΓΓ'ΝΣ'.

Αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων τούτων σχηματίζουν ἓν περιγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο) *ἑξάγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ εὐθεῖαι τοῦ Brianchon (= διαγώνιοι) διέρχονται διὰ τοῦ σημείου* Ν. *Αἱ εὐθεῖαι αὗται* ΝΡ, ΝΠ, ΝΣ *εἶναι συζυγεῖς τῶν* ΝΡ', ΝΠ', ΝΣ', *διέρχονται δηλ. διὰ τῶν πόλων* Ρ, Π, Σ *τῶν τελευταίων εὐθειῶν, τῶν κειμένων ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ* Ν.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' *εἶναι ἀντίστοιχα εἰς ὁμολογίαν κατὰ τέσσα-*

ρας διαφόρους τρόπους. Πρῶτον κατὰ τὴν ὁμολογίαν κέντρου Ν *καὶ ἄξονος* ΡΡ′ *καὶ ὕστερον κατὰ τὰς ὁμολογίας μὲ κέντρα* Ρ, Π, Σ *καὶ ἄξονας τὰς πολικὰς αὐτῶν (καὶ εὐθείας Brianchon, ὡς ἀνωτέρω)* ΝΡ′, ΝΠ′, ΝΣ′ *ἀντιστοίχως.*

3) *Εἰς τὸ σημεῖον* Ρ′, *συζυγὲς τοῦ* Ρ *ἐπὶ τῆς πολικῆς* ΡΡ′ *τοῦ σημείου* Ν, *ἀντιστοιχοῦν δύο ἄλλα τρίγωνα* αβγ, α′β′γ′, *μὲ τὰς αὐτάς, ὡς τὰ πρῶτα, ἰδιότητας, καὶ μὲ τὴν ἀξιοσημείωτον συμπληρωματικήν, ὅτι αἱ ceviennes τοῦ Gergonne τοῦ πρώτου ζεύγους τῶν τριγώνων συμπίπτουν πρὸς τὰς εὐθείας Brianchon τοῦ δευτέρου ζεύγους. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες εἶναι προβολικαὶ καὶ καθίστανται προφανεῖς διὰ τοῦ ἑπομένου μετασχηματισμοῦ, ἁπλοποιοῦντος τὰ μέγιστα τὸ σχῆμα.

Ἐὰν προβάλωμεν τὸ σχῆμα (ἐπί τινος ἐπιπέδου) εἰς τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων Ρ.Ρ′ νὰ καταστῇ ἡ ἐπ᾽ ἄπειρον εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ἡ δὲ προβολὴ τοῦ πόλου Ν νὰ εἶναι ἡ (κοινὴ) ἑστία τῶν λαμβανομένων καμπύλων, τὸ σημεῖον τοῦτο, τοῦ ὁποίου ἡ πολικὴ εἶναι ἡ ἐπ᾽ ἄπειρον εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου, θὰ εἶναι *κέντρον* ἑκάστης τῶν νέων καμπύλων καὶ αἱ καμπύλαι αὗται *ὁμόκεντροι περιφέρειαι.*

Ἡ ἄκρα αὐτὴ ἁπλοποίησις τοῦ σχήματος καθιστᾶ προδήλους τότε τὰς ἀνωτέρω προβολικὰς ἰδιότητας αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ἡ ἐνδιαφέρουσα αὕτη μελέτη (§§ 1546 κ ἕως 1546 σ) ὀφείλεται εἰς τὸν H. Maltête, καθηγητὴν εἰς Dijon.

ΒΙΒΛΙΟΝ IV

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Ἐμβαδὰ τῶν σχημάτων

1547. Εἰς τὰ *Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας* (IV Βιβλίον), τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχημάτων πoριζόμεθα ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ δι' ἀμέσου συγκρίσεως τῆς πρὸς μέτρησιν ἐπιφανείας πρὸς ἄλλην γνωστοῦ μέτρου. Ἀποδεικνύεται οὕτω ὅτι ἓν παραλληλόγραμμον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους· δυνάμεθα ἑπομένως νὰ θεωρήσωμεν ὡς μέτρον τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλογράμμου τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦν τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ σχήματος.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα διὰ τὸ τρίγωνον καὶ τραπέζιον· διὰ τὴν περιφέρειαν, ὅμως, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ καταφύγωμεν εἰς ἀπειροστικὰς μεθόδους καὶ νὰ θεωρήσωμεν τὸ σχῆμα αὐτὸ ὡς ὅριον κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐξάνει εἰς ἄπειρον.

Ὁ κύριος θεμελιωτὴς τῆς *Γεωμετρίας τοῦ μέτρου* εἶναι ὁ *Ἀρχιμήδης*. Εἰς τοῦτον ὀφείλομεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς περιφερείας καὶ τὸν τετραγωνισμὸν παραβολικοῦ τμήματος (G., n° 947).

Καὶ εἶναι βεβαίως ἀληθὲς ὅτι, ἐνωρίτερον τοῦ Ἀρχιμήδους ὁ *Ἱπποκράτης* ὑπελόγισεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν φερωνύμων *μηνίσκων* (§§ 1577, 1578). Ἀλλά, νομίζομεν, ὅτι ἡ ἐπιτυχία αὐτὴ ἦτο περισσότερον μία κατ' εὐτυχίαν διαπίστωσις τῆς *ἰσοδυναμίας* μεταξὺ ἑνὸς σχήματος μὲ καμπυλόγραμμον περίμετρον καὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, παρὰ μέθοδος γενική, δυναμένη νὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐπιφανείας ἐπιπέδων κλειστῶν καμπύλων.

Ἡ *Μέθοδος τῶν ἀπειροστικῶν ἐμβαδῶν* τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐφαρμόζεται εἰς τὰ παραβολικὰ χωρία, ὡς καὶ εἰς τὴν μέτρησιν τῶν στερεῶν, καὶ θὰ τὴν συναντήσωμεν εἰς τὸ VII Βιβλίον (§ 1902). Εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τοῦ ἔργου τούτου εὑρίσκεται καὶ ἡ *Μέθοδος τῶν ἀδιαιρέτων* τοῦ Cavalieri, ὡς καὶ ἡ *Μέθοδος ἀθροίσεως*, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ἐπισυνάψωμεν εἰς τὰς δύο πρώτας.

Οἱ τύποι τοῦ κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμοῦ ἐμβαδῶν τοὺς ὁποίους θὰ χρησιμοποιήσωμεν εἶναι οἱ τοῦ Thomas Simpson (G., n° 983) καὶ τοῦ Poncelet (G., n° 357).

Ὁ τελευταῖος οὗτος τύπος ἐτροποποιήθη ἐπιτυχῶς ὑπὸ τοῦ Parmentier (G., n° 996).

Θεώρημα 517

1548. **Τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου περιγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας.**

Ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον τοῦτο ἀναλύεται εἰς τρίγωνα ἔχοντα ὕψος κοινὸν ρ καὶ βάσεις τὰς πλευρὰς αὐτοῦ.

Θεώρημα 518

1549. 1) Αἱ συνδέουσαι τὸ κέντρον βάρους τριγώνου μὲ τὰς κορυφὰς αὐτοῦ εὐθεῖαι, διαιροῦν τὸ τρίγωνον εἰς τρία ἄλλα ἰσοδύναμα.

2) Αἱ τρεῖς διάμεσοι διαιροῦν τὰ τρίγωνα εἰς ἓξ ἄλλα ἰσοδύναμα.

Θεώρημα τοῦ Vecten 519

1550. Ἐὰν κατασκευάσωμεν τετράγωνα ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 1001) καὶ φέρωμεν τὰς ΗΙ, Ι'Κ, ΛΘ:

1) Ἕκαστον τῶν τριγώνων ΑΚΙ', ΒΛΘ, ΓΗΙ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχηματιζομένου ἑξαγώνου ΚΙ'... εἶναι τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης.

Σχ. 1001.

Ἃς προεκτείνωμεν τὴν ΛΒ καὶ ἃς φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπ' αὐτὴν ΘΜ.

1) Τὰ τρίγωνα ΒΜΘ, ΒΑΓ εἶναι ἴσα, τὰ ΒΛΘ, ΒΜΘ ἰσοδύναμα· ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΛΘ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμα, κλπ.

2) Ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΘΛ ἔχομεν

$$ΘΛ^2 = γ^2 + α^2 + 2ΒΛ \,.\, ΒΜ = γ^2 + α^2 + 2γ^2 = α^2 + 3γ^2.$$

Ἀναλόγως,

$$ΗΙ^2 = α^2 + 3β^2 \quad \text{καὶ} \quad ΚΙ'^2 = β^2 + γ^2.$$

Τὸ ἄθροισμα ἑπομένως τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι

$$4α^2 + 4β^2 + 4γ^2 = 4α^2 + 4(β^2 + γ^2) = 8α^2.$$

1550 α. Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι τοῦ Vecten καθηγητοῦ εἰς *Nimes*. Ἐδημοσιεύθη εἰς τὰ *An. de Gergonne*, τόμ VII (1816-1817), σ. 322, nos 5 καὶ 6, ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς σπουδῆς τοῦ σχήματος τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τυχόντος τριγώνου καὶ τῶν ἐπὶ τῶν πλευρῶν του κατασκευαζομένων, ἐξωτερικῶς αὐτοῦ, τετραγώνων (Βλ. ἐπμ. § 1773 λ...φ). Ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ πᾶν τρίγωνον, μὲ τὴν ἑξῆς τροποποίησιν τοῦ δευτέρου μέρους του: *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων* $ΗΙ^2 + Ι'Κ^2 + ΛΘ^2$ *εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.*

Θεώρημα 520

1551. Πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (Burlet, Dublin, N. A. 1856, σ. 290).

Ἐπειδὴ (σχ. 1002),

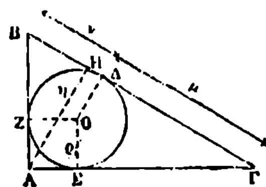
$$AE = AZ = \rho, \quad \Gamma E = \mu, \quad BZ = \nu,$$

τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου εἶναι

$$(AE + E\Gamma)(AZ + ZB) = 2E = (\rho + \mu)(\rho + \nu) = \rho^2 + \rho(\mu + \nu) + \mu\nu.$$

Ἀλλὰ $\rho^2 + \rho(\mu + \nu)$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ἀφοῦ $\mu\rho$ ἐκφράζει τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΔΟΓ ἢ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΔΟΕΓ, καὶ $\rho\nu$ ὁμοίως ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΒΔΟΖ, ρ^2 δὲ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου ΑΕΟΖ. Ἑπομένως,

$$2E = E + \mu\nu \quad \text{ἢ} \quad E = \mu . \nu.$$



Σχ. 1002

Θεώρημα 521

1552. **Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ ὀρθικοῦ αὐτοῦ τριγώνου.**

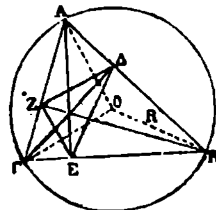
Ὡς γνωρίζομεν (§§ 292 θ καὶ 663), ἡ ἀκτὶς ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΖ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑπομένως τοῦ τετραπλεύρου ΑΔΟΖ εἶναι ἴσον πρὸς $R . \frac{Z\Delta}{2}$. Ἀναλόγως

$$(B\Delta OE) = R . \frac{\Delta E}{2},$$

$$(\Gamma EOZ) = R . \frac{EZ}{2}.$$

Ἄρα,

$$(AB\Gamma) = R . \frac{\Delta E + EZ + Z\Delta}{2}.$$



Σχ. 1003.

1552 α. *Σημείωσις.* 1) Ἂν 2τ′ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου ΔΕΖ, θὰ ἔχωμεν

$$E = (AB\Gamma) = R\tau'.$$

2) Ὁ προηγούμενος τύπος ἀληθεύει δι' ὀξυγώνιον μόνον τρίγωνον. Ἐὰν ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα, θὰ εἶναι

$$E = R(\tau' - \Delta Z),$$

ὅπου ΔΖ ἡ πλευρὰ τοῦ ὀρθικοῦ, ἡ ἐντὸς τῆς γωνίας Α κειμένη.

Θεώρημα 521—I

1552 β. **Ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου ΔΕΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ γινομένου τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ διὰ τοῦ διπλασίου τετραγώνου τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας.**

Ἐπειδὴ

$$(ΑΒΓ) = Ε = \frac{αβγ}{4R} = \frac{R}{2}\cdot(ΔΕ + ΕΖ + ΖΔ),$$

ἕπεται:

$$ΔΕ + ΕΖ + ΖΔ = \frac{αβγ}{2R^2}\cdot$$

Θεώρημα 521—II

1552 γ. Ἐὰν Π, Ρ, Σ εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ κέντρου βάρους τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τῶν πλευρῶν του, ἰσχύει ἡ σχέσις

$$(ΠΡΣ) = \frac{4}{9}\left(\frac{α^2 + β^2 + γ^2}{α^2β^2γ^2}\right)Ε^3.$$

(*N. Ç. Math.*, τοῦ Catalan, 1874 - 75, σ. 107).

Θεώρημα 521—III

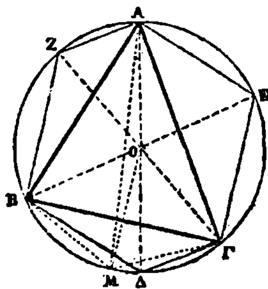
1552 δ. Ἐὰν Ε' παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου τοῦ ποδικοῦ τριγώνου τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, θὰ εἶναι

$$Ε' = \frac{16\,Ε^5}{α^2β^2γ^2(α + β + γ)^2} \quad ἢ \quad Ε' = Ε\left(\frac{ρ}{2R}\right)^2.$$

(*N. C. M.*, 1874 - 75, σ. σ. 75, 187 - n° 6, 224). Ὁ πρῶτος τύπος εἶναι τοῦ Hain καὶ ὁ δεύτερος τοῦ Neuberg.

Θεώρημα 522

1553. Ἔστω ΑΒΓ τρίγωνον καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ δεύτερα πέρατα τῶν διὰ τῶν Α, Β, Γ ἀντιστοίχως διαμέτρων τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας (Ο). Δείξατε ὅτι τὸ ἑξάγωνον ΑΖΒΔΓΕ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου (Ν. Α., 1844, σ. 317).



Σχ. 1004.

Τὰ τετράπλευρα ΑΖΒΔ, ΔΓΕΑ εἶναι ἴσα, ἀφοῦ

$$ΔΓ = ΑΖ,\quad ΓΕ = ΖΒ \quad καὶ \quad ΕΑ = ΒΔ.$$

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἓν τῶν τετραπλεύρων τούτων.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα, τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους, εἶναι ἰσοδύναμα, θὰ ἔχωμεν

$$(ΑΟΒ) = (ΑΟΕ),$$
$$(ΒΟΓ) = (ΓΟΕ),$$
$$(ΓΟΑ) = (ΓΟΔ).$$

Ἄρα, διὰ προσθέσεως:

$$(ΑΒΓ) = (ΑΔΓΕ).$$

1554. Παρατήρησις. Τὸ ἑξάγωνον τὸ κατασκευαζόμενον κατὰ τὸν προη-

γούμενον τρόπον ἀλλὰ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν διαμέτρων διὰ τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πρῶτον ἑξάγωνον.

Ἐπειδὴ ἀμφότερα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου.

Θεώρημα 522—Ι

1555. **Τὸ ἑξάγωνον ΑΕΓΜΒΖ γίνεται μέγιστον ὅταν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, αἱ εὐθεῖαι ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.**

Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α (σχ. 1004) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου, ὡς καὶ ἡ κάθετος ΟΜ· τὸ δὲ τρίγωνον ΒΜΓ>ΒΔΓ κλπ.

Θεώρημα 523

1556. **Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΑΛΒ ὀρθογώνιον, κατὰ τὸ σχῆμα 1005, τρίγωνον, ἔχον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τοῦ ἐκ τοῦ Γ ὕψους τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΛΒ τριγώνου εἶναι μέσον ἀνάλογον ἐκείνων τῶν ΑΒΓ καὶ ΑΒΗ.**

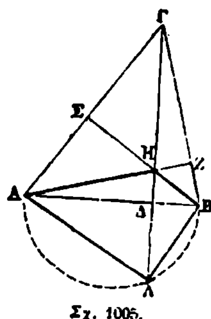
1η Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ τρία ταῦτα τρίγωνα ἔχουν κοινὴν βάσιν ΑΒ, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$ΔΛ^2 = ΔΓ \,.\, ΔΗ,$$

ἢ ὅτι

$$ΔΑ \,.\, ΔΒ = ΔΓ \,.\, ΔΗ$$

ἀφοῦ, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΛΒ, εἶναι $ΔΛ^2 = ΔΑ \,.\, ΔΒ$. Τὰ τρίγωνα ΑΔΗ καὶ ΓΔΒ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ αἱ εἰς τὰ Α καὶ Γ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι.



Σχ. 1005.

Ἐπομένως

$$\frac{ΑΔ}{ΓΔ} = \frac{ΔΗ}{ΒΔ} \quad ἢ \quad ΔΑ \,.\, ΔΒ = ΔΓ \,.\, ΔΗ.$$

2α Ἀπόδειξις. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σχῆμα ΗΑΒΓ ὡς προβολὴν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕδρας ΑΒΓ τετραέδρου Κ - ΑΒΓ τρισορθογωνίου εἰς Κ, τὸ τρίγωνον ΑΛΒ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ κατάκλισις ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ΑΚΒ. Ἐὰν ἀνεγείρωμεν τὸ τρίγωνον τοῦτο εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, τὸ τρίγωνον ΓΚΔ θὰ εἶναι προφανῶς ὀρθογώνιον καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$ΔΚ^2 = ΔΗ \,.\, ΔΓ,$$

ἢ

$$ΔΛ^2 = ΔΗ \,.\, ΔΓ,$$

ἀφοῦ

$$ΔΛ = ΔΚ.$$

Θεώρημα 523—Ι

1557. **Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τρίγωνον ὀρθογώνιον ἔχον τὴν κορυφήν του ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους ἢ τῆς προεκτάσεώς του. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν οὕτω κατασκευαζομένων τριγώνων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 1005).**

Ἔστωσαν Λ, Μ, Ν, Ε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριῶν τριγώνων καὶ τοῦ ΑΒΓ.

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, θὰ ἔχωμεν

$$Λ^2 = Ε.(ΑΒΗ), \quad Μ^2 = Ε.(ΑΓΗ), \quad Ν^2 = Ε.(ΒΓΗ).$$

Ἐπομένως

$$Λ^2 + Μ^2 + Ν^2 = Ε\left[(ΑΒΗ) + (ΑΓΗ) + (ΒΓΗ)\right] = Ε^2.$$

Θεώρημα 524

1558. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὰ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένα ὀρθογώνια, τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, ἔχουν λόγον ἐμβαδῶν ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων.

(*Μέθοδοι*, § 200).

Θεώρημα τοῦ Clairaut 525

1559. Ἐπὶ δύο τῶν πλευρῶν, ΑΒ, ΑΓ, τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν παραλληλόγραμμα τυχόντα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΘ, κατὰ τὸ σχῆμα 1006· προεκτείνομεν ἀκολούθως τὰς πλευρὰς αὐτῶν ΔΕ καὶ ΖΘ μέχρι τῆς τομῆς των Η, φέρομεν τὴν ΗΑΜ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΜΝ = ΑΗ.

Ἔστω ΒΓΚΛ τὸ παραλληλόγραμμον μὲ ἀπέναντι πλευρὰς ΒΛ = ΓΚ = ΜΝ. Δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων παραλληλογράμμων καὶ κατόπιν τούτου συναγάγετε τὴν ἀλήθειαν τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Σχ. 1006.

Διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΛΒΡ, ΚΓΣ πρὸς τὴν ΑΜ. Ἐπειδὴ τὰ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους παραλληλόγραμμα εἶναι ἴσα, θὰ ἔχωμεν

$$(ΒΓΙΙ') = (ΒΓΚΛ), \quad (ΑΒΔΕ) = (ΑΒΡΗ), \quad (ΑΓΖΘ) = (ΑΓΣΗ).$$

Ἀλλ' εἶναι $ΑΗ = ΜΝ$ κλπ.

Ἄρα $(ΒΜΝΛ) = (ΑΒΡΗ), \quad (ΓΜΝΚ) = (ΑΓΣΗ)$

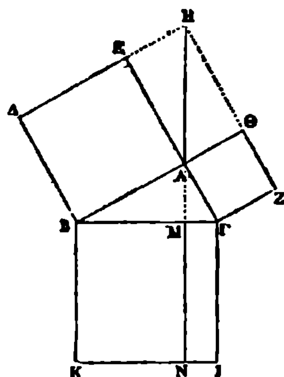
καὶ $(ΑΒΔΕ) + (ΑΓΖΘ) = (ΒΓΙΙ')$.

1559 α. Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδίδεται συχνὰ εἰς τὸν ἀδελφὸν τοῦ Clairaut (βλ. *Million de faits*, σ. 131), μολονότι ἀνήκει εἰς τὸν *Πάππον*. (Κατὰ τὰς *Récréations mathématiques* τοῦ Ozanam, ἐπανεκδοθείσας καὶ ἐπαυξηθείσας ὑπὸ τοῦ Montucla, 1778. Βλ. ἐπίσης *Mathesis*, 1908, σ. 13).

Θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου 525—Ι

1560. Τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου κατασκευαζομένων τετραγώνων.

Δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὸ θεώρημα τοῦτο εἰς τὸ προηγούμενον. Ἀρκεῖ πράγματι νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΗ (σχ. 1007) εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ καὶ κάθετος ἐπ' αὐτήν.



Σχ. 1007.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΑΗ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας τὰς καθέτους αὐτῶν πλευράς:

$$ΑΒ = ΑΕ, \quad ΑΓ = ΑΘ = ΕΗ.$$

Ἑπομένως

$$ΑΗ = ΒΓ.$$

Ἀφ' ἑτέρου, $\widehat{ΕΑΗ} = \widehat{ΓΑΜ}$, ὡς κατὰ κορυφήν, καὶ κατὰ συνέπειαν

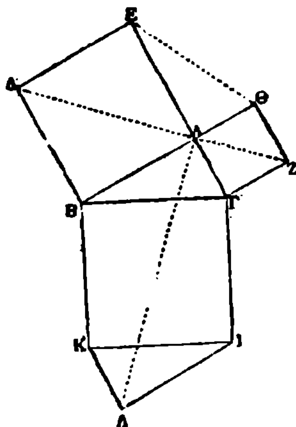
$$\widehat{ΓΑΜ} = \widehat{ΑΒΓ}.$$

Εἶναι δηλ. ἡ ΑΗΜ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

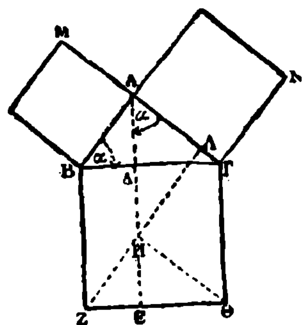
Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἀποδειχθῇ κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ἀναφέρομεν τινὰς ἐξ αὐτῶν.

ΑΛΛΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1) Ἐπὶ τῆς ΙΚ κατασκευάζομεν τρίγωνον ὀρθογώνιον ΙΛΚ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ ΙΛ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ (Σχ. 1008).



Σχ. 1008.



Σχ. 1009.

Τὰ τέσσαρα τετράπλευρα ΔΒΓΖ, ΔΕΘΖ, ΑΒΚΛ, ΑΓΙΛ εἶναι ἴσα, ὡς ἀλληλοεπιθέσιμα, καὶ τὸ ἑξάγωνον ἑπομένως ΔΒΓΖΘΕΔ

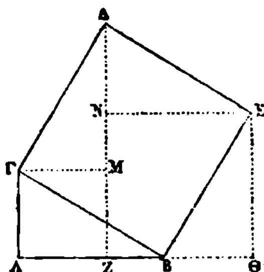
ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἑξάγωνον ΑΒΚΛΙΓΑ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο ταῦτα σχήματα ἔχουν κοινὸν μέρος τὸ ΑΒΓ καὶ

$$ΑΕΘ = ΙΛΚ,$$

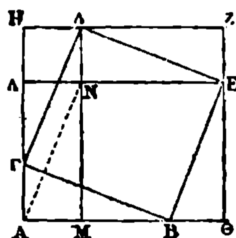
ἕπεται ὅτι τὰ ὑπολειπόμενα μέρη αὐτῶν εἶναι ἰσοδύναμα, ἢ

$$(ΒΓΙΚ) = (ΑΒΔΕ) + (ΑΓΖΘ).$$

2) Φέρομεν τὰς καθέτους ΑΔΕ, ΖΗΛ (σχ. 1009). Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΗΘ εἶναι ἴσα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΖΗ, ΑΓΘΗ



Σχ. 1010.

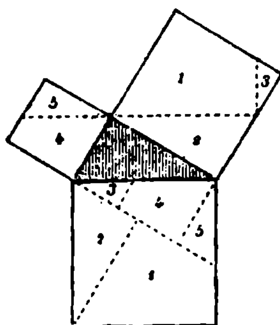


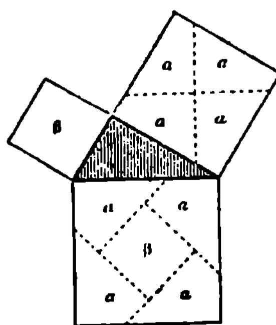
Σχ. 1011.

ἰσοδύναμα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ τετράγωνα ΒΜ καὶ ΑΝ. Ἄρα...

3) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον (σχ. 1010) καὶ ΒΓΔΕ τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης του τετράγωνον.

Φέροντες τὰς καθέτους ΔΖ, ΕΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὰς ΓΜ, ΕΝ ἐπὶ τὴν ΔΖ, λαμβάνομεν τέσσαρα ὀρθογώνια καὶ ἴσα τρίγωνα.

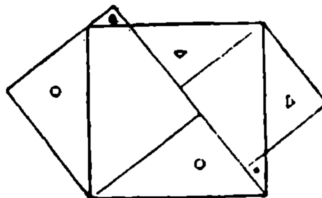

Σχ. 1012.


Σχ. 1013.

Ἐπειδὴ δέ, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ πεντάγωνον ΑΘΕΔΓ δύο ἐκ τῶν τριγώνων τούτων, λαμβάνομεν ὡς ὑπολειπόμενον μέρος τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ τετράγωνον, ἐνῷ, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὰ

τρίγωνα ΓΜΔ καὶ ΔΝΕ, ὑπολείπεται μέρος ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ τῶν ἄλλων καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τετραγώνων, ἡ ἀλήθεια τῆς ἀρχικῆς προτάσεως εἶναι πρόδηλος.

4) Ἔστω πάλιν ΒΓΔΕ (σχ. 1011) τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον, ΘΝ καὶ ΝΗ τὰ ἴσα πρὸς τὰ ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν



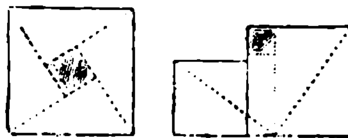
Σχ. 1014.

κατασκευαζόμενα τετράγωνα. Ὡς ἐκ τοῦ σχήματος καταφαίνεται εἶναι

$$(\text{ΑΘΖΗ}) = (\text{ΒΓΔΕ}) + (\text{ΑΒΓ}) + (\text{ΒΘΕ}) + (\text{ΕΖΔ}) + (\text{ΔΗΓ}) =$$
$$= (\text{ΒΓΔΕ}) + 4\,(\text{ΑΒΓ}),$$
$$(\text{ΑΘΖΗ}) = (\text{ΗΔΝΛ}) + (\text{ΜΘΕΝ}) + (\text{ΔΝΕΖ}) + (\text{ΛΝΜΑ}) =$$
$$= (\text{ΗΔΝΛ}) + (\text{ΜΘΕΝ}) + 4\,(\text{ΑΒΓ}).$$

Ἄρα

$$(\text{ΒΓΔΕ}) = (\text{ΗΔΝΛ}) + (\text{ΜΘΕΝ}).$$



Σχ. 1015.

Ἰδοὺ ἀκόμη τρεῖς ἄλλαι ἀποδείξεις τῆς προτάσεως δι' ἀναλύσεως τοῦ σχήματος εἰς μέρη.

5) (Σχ. 1013). Ἡ ἐκ τῆς ἐποπτείας τοῦ σχήματος πρόδηλος αὕτη λύσις ὀφείλεται εἰς τὸν G. Lehr (*Bulletin des Sciences Math. et Phys. élémentaires* τῶν Gerard καὶ Michel).

6) (Σχ. 1012). Ἡ λύσις αὕτη, ὁμοίως ἐποπτική, εἶναι τοῦ S. de la Campa (Las Palmas) (*Int. d. Math.*, 1902, σ. 68, n° 2303).

7) Ἡ τοῦ Σχ. 1014 ἀνήκει εἰς τὸν Ἰάπωνα Yoshinosi Isomura, κατὰ τὸ 1684 (*Int. d. Math.*, 1903, σ. 315).

8) Ἡ λύσις τοῦ Ἰνδοῦ γεωμέτρου Bhascara (Σχ. 1015) συνοδεύεται ἐπεξηγηματικῶς ὑπὸ τῆς μόνης λέξεως: *Ἰδέ*. (Βλ. σχετικῶς *I. d. M.*, 1902, n° 2496, σ. 320, ἄρθρον τοῦ P.-F. Teilhet).

9) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον (σχ. 1016). Μὲ κέντρον τὸ ἓν τῶν ἄκρων Β τῆς ὑποτεινούσης καὶ ἀκτῖνα γ, γράφομεν περιφέρειαν.

Σχ. 1016.

Θὰ ἔχωμεν:

$$ΑΓ^2 = ΓΔ . ΓΕ$$

ἢ $β^2 = (α + γ)(α - γ) = α^2 - γ^2$.

10) Τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$2Ε = βγ = τρ = τ(τ - α). \qquad (§ 743)$$

Ἑπομένως, $2βγ = (α + β + γ)(β + γ - α)$

ἢ $α^2 = β^2 + γ^2$.

(Mollmans καὶ Thiry, *Mathesis*, 1902, σ. 17, n° 3 καὶ σ. 42, α' παραπομπή).

1561. Σημείωσις. Ἡ πρώτη ἀπόδειξις εἶναι τοῦ Terquem. Διὰ διαφόρους ἄλλας ἀποδείξεις τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος βλέπε *Interm. d. Math.*, 1903, σ. 172, n° 2496.—1908, σ. σ. 124, 216, 284, n° 3403.—1909, σ. 79.

Θεώρημα 525—II

1562. Τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου τυχόντος ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρός:

1) Τὸ γινόμενον μιᾶς διαγωνίου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τῆς ἄλλης διαγωνίου ἀπὸ τῆς πρώτης.

2) Τὸ ἥμισυ γινόμενον τῶν διαγωνίων ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν.

3) Τὸ γινόμενον τῶν διαμέσων ΕΘ, ΖΗ αὐτοῦ (Σχ. 1017) ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας των.

Θεώρημα 526

1563. Ἐὰν δύο εὐθύγραμμα τμήματα ὡρισμένων μηκῶν τέμνωνται κατὰ σταθερὰν γωνίαν, τὸ τετράπλευρον, τὸ ἔχον ὡς διαγωνίους τὰ τμήματα ταῦτα, ἔχει σταθερὰν τὴν ἐπιφάνειαν.

(*Μέθοδοι*, § 155).

1563 α. Τὸ τετράπλευρον τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, τῶν ἀγομένων ἐκ τυχόντος σημείου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τετραγώνου ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, ἔχει ἐπιφάνειαν σταθεράν.

Θεώρημα 526—I

1563 β. Ἐὰν μεταβλητοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δύο ἀπέναντι κορυφαὶ Α, Γ κινοῦνται (ἰσοταχῶς καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν) ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΧ, ΓΥ, αἱ δὲ δύο ἄλλαι εἶναι σταθερὰ σημεῖα, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ μένει ἀμετάβλητος (Prouhet).

Ἐπειδὴ τὰ μήκη τῶν διαγωνίων καὶ ἡ γωνία των δὲν μεταβάλλονται (§ 1563).

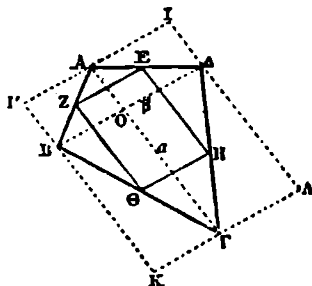
Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν αἱ κορυφαὶ Β, Δ κινῶνται καθ' ὅμοιον τρόπον ἐπὶ δύο ἄλλων παραλλήλων ΒΧ', ΔΥ' καὶ Α'Β'Γ'Δ' εἶναι αἱ θέσεις τῶν τεσσάρων κορυφῶν κατά τινα στιγμήν, τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἰσοδύναμα.

2) Τὸ ἀνάλογον θεώρημα ἰσχύει καὶ διὰ δύο τετράεδρα ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ'.

Θεώρημα 526—II

1564. Τὸ παραλληλόγραμμον τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τυχόντος τετραπλεύρου εἶναι τὸ ἥμισυ αὐτοῦ.

Τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ περιγεγραμμένον εἰς τετράπλευρον καὶ ἔχον τὰς πλευράς του παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους, εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου.



Σχ. 1017.

Τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΘΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ τοῦτο τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου παραλληλογράμμου. Ἐὰν α, β εἶναι τὰ μήκη τῶν διαγωνίων καὶ φ ἡ γωνία των, θὰ εἶναι

$$\text{ΙΙ'ΚΛ} = \alpha\beta \ \eta\mu \ \varphi,$$

$$\text{ΑΒΓΔ} = \frac{\alpha\beta \ \eta\mu \ \varphi}{2},$$

$$\text{ΕΖΘΗ} = \frac{\alpha\beta \ \eta\mu \ \varphi}{4}.$$

Παρατήρησις. Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις δύνανται νὰ θεωρηθοῦν εἰδικαὶ περιπτώσεις τοῦ *θεωρήματος τοῦ Prouhet* (§ 1575).

Θεώρημα 527

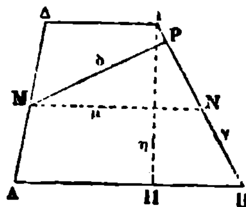
1565. Πᾶσα εὐθεῖα διὰ τοῦ μέσου τῆς διαμέσου τραπεζίου καὶ τέμνουσα τὰς βάσεις αὐτοῦ, διαιρεῖ τὸ τραπέζιον εἰς δύο ἄλλα ἰσοδύναμα.

Ὑποτίθεται ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὴν μικροτέραν βάσιν τοῦ τραπεζίου εἰς σημεῖον ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Ἄλλως, ἡ σπουδὴ τοῦ ζητήματος καθίσταται μᾶλλον περίπλοκος.

(*Μέθοδοι*, § 254).

Θεώρημα 528

1566. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπ' αὐτῆς.



Σχ. 1018.

Τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΗΒΓ, ΡΜΝ δίδουν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{\gamma}{\mu},$$

ἄρα καὶ τὴν

$$\delta\gamma = \mu\eta = \text{Ε}.$$

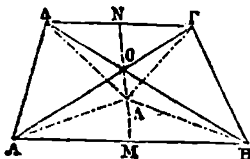
Παρατήρησις. Ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἑκάστης τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἄλλης εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ λόγου τῶν πλευρῶν αὐτῶν.

Ἔστω δ', πράγματι, ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου Ν τῆς ΓΒ ἀπὸ τῆς ΑΔ· θὰ ἔχωμεν: δ'. ΑΔ = δ ΒΓ ἢ

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΒΓ}}.$$

Θεώρημα 528—I

1567. Τὰ τρίγωνα μὲ κορυφὴν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων τραπεζίου καὶ βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς, εἶναι ἰσοδύναμα.



Σχ. 1019.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΓΒ εἶναι ἰσοδύναμα καὶ ἑπομένως

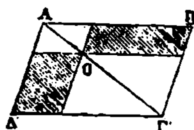
ΑΟΔ = ΑΔΒ − ΑΟΒ =
= ΑΓΒ − ΑΟΒ = ΓΟΒ.

Θεώρημα 528—II

1568. Τὰ τρίγωνα ΑΛΔ, ΒΛΓ (Σχ. 1019), μὲ βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς καὶ κοινὴν κορυφὴν Λ τυχὸν σημεῖον τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν βάσεων, εἶναι ἰσοδύναμα.

Θεώρημα 529

1569. Ἐκ τυχόντος σημείου ἐπὶ τῆς διαγωνίου παραλληλογράμμου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς. Δείξατε ὅτι τὰ οὕτω σχηματιζόμενα δύο παραλληλόγραμμα εἶναι ἰσοδύναμα.



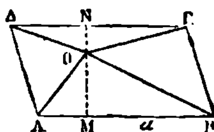
Σχ. 1020.

Ἐπειδὴ ἡ διαγώνιος ΑΓ καὶ τὰ τμήματα αὐτῆς ΑΟ, ΟΓ διαιροῦν τὸ ἀρχικὸν παραλληλόγραμμον καὶ τὰ λευκὰ τοιαῦτα εἰς τρίγωνα ἴσα. Ἄρα...

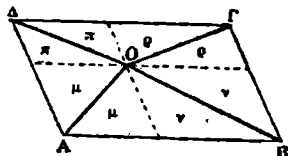
Θεώρημα 530

1570. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Ο εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι

$$(\text{ΑΟΒ}) + (\text{ΓΟΔ}) = (\text{ΒΟΓ}) + (\text{ΔΟΑ}).$$



Σχ. 1021.



Σχ. 1022.

Ἔστω $AB = \Gamma\Delta = \alpha$. Θὰ εἶναι

$$(AOB) = \frac{\alpha . OM}{2}, \quad (\Gamma O\Delta) = \frac{\alpha . ON}{2}$$

καὶ

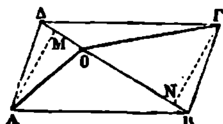
$$(AOB) + (\Gamma O\Delta) = \frac{\alpha}{2}(MN) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta) = (BO\Gamma) + (\Delta OA).$$

Ἄλλη ἀπόδειξις.

$$(OAB) + (O\Gamma\Delta) = \mu + \nu + \pi + \rho = (OA\Delta) + (O\Gamma B).$$

Θεώρημα 530—I

1571. Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἐὰν τὸ σημεῖον O εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα εἶναι ἀνὰ δύο ἰσοδύναμα.



Σχ. 1023.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΟ, ΓΔΟ λ. χ. εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα κοινὴν τὴν βάσιν ΔΟ καὶ ὕψη AM, ΓN ἴσα.

Θεώρημα 530—II

1572. Τὰ τρίγωνα μὲ κορυφὴν τυχὸν σημεῖον τῆς περιμέτρου παραλληλογράμμου καὶ βάσεις τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

Πράγματι, $(AO\Gamma) = (BO\Delta)$ καὶ ἐπομένως :

$$(AO\Gamma) + (BO\Delta) = (BO\Gamma) + (BO\Delta) = (B\Gamma\Delta).$$

Σχ. 1024.

Θεώρημα 530—III

1573. Ἔστω ΑΒΓΔ τυχὸν παραλληλόγραμμον καὶ O σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Δεῖξατε ὅτι τὸ τρίγωνον μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον O καὶ βάσιν μίαν τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν τριγώνων μὲ κορυφὴν O καὶ βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου, τὰς ἐχούσας κοινὸν πέρας τὸ ἓν τῶν ἄκρων τῆς διαγωνίου.

1) Θεωρήσωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΔ· θὰ δείξωμεν ὅτι

$$(OA\Gamma) = (OAB) + (OA\Delta).$$

Σχ. 1025.

Διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν τριγώνων μὲ κοινὴν βάσιν ΑΟ, φέρομεν τὰ ὕψη ΓΕ, ΒΘ, ΔΖ αὐτῶν. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $\Gamma E = B\Theta + \Delta Z$.

Ἔστω ΒΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΟΑ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ, ΒΗΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς παραλλήλους. Ἑπομένως

$$\Gamma H = \Delta Z$$

καὶ

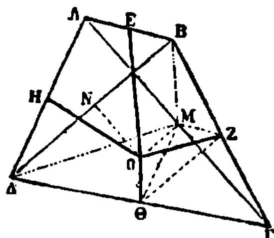
$$\Gamma E = \Gamma H + HZ = \Delta Z + B\Theta.$$

2) Ἐὰν τὸ σημεῖον Ο εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΒΑΔ ἢ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς, τὸ τρίγωνον ΟΑΓ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων τριγώνων.

3) Ἐὰν τὸ σημεῖον Ο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΑΓ ἢ ἐπὶ τῶν προεκτάσεών της, (ΟΑΓ) = 0 καὶ τὰ δύο ἄλλα τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.

Θεώρημα τοῦ Brune 531

1574. Ἔστω ΑΒΓΔ τυχὸν τετράπλευρον, Μ, Ν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του καὶ ΜΟ, ΝΟ παράλληλοι πρὸς αὐτάς, τεμνόμεναι εἰς Ο. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὸ σημεῖον Ο μετὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, διαιροῦν αὐτὸ εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα τετράπλευρα.



Σχ. 1020.

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἓν ἐκ τῶν τεσσάρων σχηματιζομένων τετραπλεύρων, ὡς τὸ ΟΘΓΖ, ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἀρχικοῦ τετραπλεύρου. Φέρομεν πρὸς τοῦτο τὰς εὐθείας ΜΒ, ΜΔ, ΜΘ.

Παρατηροῦμεν ὅτι

$$(\text{ΟΘΓΖ}) = (\text{ΓΘΖ}) + (\text{ΘΟΖ}) = \frac{1}{4}(\text{ΓΒΔ}) + (\text{ΘΜΖ}),$$

ἀφοῦ ἡ εὐθεῖα ΟΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΘΖ, καὶ

$$(\text{ΘΜΖ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΔ}),$$

ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς τοῦ δευτέρου καὶ ἴσαι πρὸς τὰ ἡμίση αὐτῶν. Κατὰ συνέπειαν:

$$(\text{ΟΘΜΖ}) = \frac{1}{4}(\text{ΓΒΔ}) + \frac{1}{4}(\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓΔ}).$$

Θεωρήματα τοῦ Prouhet 532

1575. 1) **Δύο πολύγωνα, τοῦ αὐτοῦ ἀρτίου πλήθους πλευρῶν καὶ τῶν ὁποίων τὰ μέσα τῶν πλευρῶν των συμπίπτουν, εἶναι ἰσοδύναμα.**

Ἔστωσαν ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' δύο πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ ἀρτίου, 2ν, πλήθους πλευρῶν καὶ τῶν ὁποίων τὰ μέσα Ε, Ζ, Η, Θ συμπίπτουν. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΑ'... ΔΔ'.

Ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν

$$\text{ΑΕ} = \text{ΕΒ}, \quad \text{Α'Ε} = \text{ΕΒ'} \text{ κλπ.}$$

καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ... ΔΔ' εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Προβάλλομεν τὰς κορυφὰς καὶ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἐπὶ εὐθείας ΧΥ, καθέτου ἐπὶ τὴν κοινὴν διεύθυνσιν τῶν ΑΑ'... ΔΔ'.

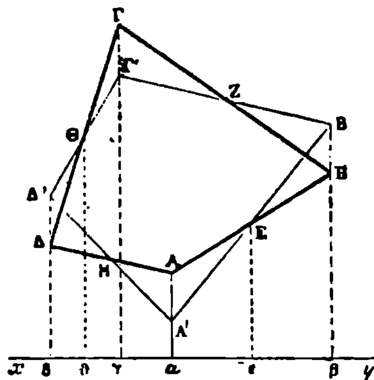
Τὰ σχηματιζόμενα τραπέζια εἶναι ἰσοδύναμα ἀνὰ δύο. Λ. χ., (ΑΒβα) = (Α'Β'βα), ἀφοῦ ἔχουν τὴν αὐτὴν μέσην βάσιν Εε καὶ

τὸ αὐτὸ ὕψος αβ. Τὰ δύο δὲ πολύγωνα (ΑΒΓΔ), (Α′Β′Γ′Δ′) εἶναι ἰσοδύναμα ἐπίσης, ἐπειδὴ εἶναι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα ἰσοδυνάμων τραπεζίων:

$$(ΑΒΓΔ) = (ΒΓγβ) + (ΓΔδγ) - (ΔΑαδ) - (ΑΒβα)$$

$$(Α'Β'Γ'Δ') = (Β'Γ'γβ) + (Γ'Δ'δγ) - (Δ'Α'αδ) - (Α'Β'βα).$$

Ἄρα: $$(ΑΒΓΔ) = (Α'Β'Γ'Δ').$$



Σχ. 1027.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐδόθη ὑπὸ τοῦ E. Prouhet εἰς N. A., 1851, σ. 181.

Θεώρημα 533

1576. 2) Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς πολυγώνου ἀρτίου πλήθους 2ν πλευρῶν δὲν μεταβάλλεται ἐὰν πᾶσαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ ἀρτίας τάξεως κινηθῶσιν κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ κατὰ εὐθύγραμμα τμήματα παράλληλα καὶ ἴσα (Prouhet).

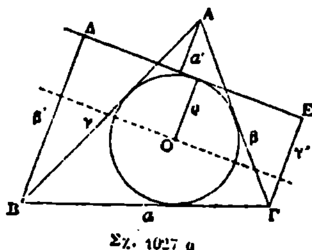
Ἔστω λ τὸ κοινὸν μῆκος τῶν τμημάτων τούτων, τῶν γραφομένων ὑπὸ τῶν κορυφῶν Β, Δ... (σχ. 1027) ἀρτίας τάξεως. Αἱ κορυφαὶ Α, Γ... περιττῆς τάξεως μένουν ἀκίνηται. Τὰ μέσα Ε, Ζ... τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μετατοπίζονται κατὰ τὰ αὐτὰ μήκη $\frac{λ}{2}$ καὶ λαμβάνομεν οὕτω ἓν νέον πολύγωνον $ΑΒ_1'ΓΔ_1'...$, ἔχον τὰ σημεῖα $Ε_1$, $Ζ_1$..., ὡς μέσα τῶν πλευρῶν του. Ἐὰν τώρα διὰ μιᾶς ἀντιθέτου φορᾶς κινήσεως ἐπαναφέρωμεν τὰ σημεῖα $Ε_1$, $Ζ_1$,... εἰς τὰς ἀρχικὰς των θέσεις Ε, Ζ..., ἀγόμεθα εἰς τὸ πολύγωνον Α′Β′Γ′Δ′, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα. Ἑπομένως:

$$(ΑΒ_1ΓΔ_1) = (ΑΒΓΔ).$$

Θεώρημα τοῦ Harcourt 533—1

1576 α. Ἔστω ΑΒΓ τρίγωνον περιγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν καὶ ΔΕ τετάρτη ἐφαπτομένη αὐτῆς. Ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου φέρο-

μεν καθέτους ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ταύτην, τῶν ὁποίων τὰ μήκη ἂς εἶναι α', β', γ'. Δείξατε ὅτι τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν γινομένων αα', ββ', γγ', ὅπου α, β, γ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.



Σχ. 1027 α

Ἂς ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ δοθέντος τριγώνου δυνάμεις παραλλήλους πρὸς τὴν ΔΕ, ὁμορρόπους καὶ ἀναλόγους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς. Ἂν λα, λβ, λγ εἶναι τὰ μέτρα τῶν δυνάμεων τούτων καὶ κοινὴ φορά των ἡ ἐκ τοῦ Δ πρὸς Ε, τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν αὐτῶν πρὸς τὸν ἄξονα ΔΕ εἶναι

$$\rho\alpha\,.\,\alpha' - \rho\beta\,.\,\beta' - \rho\gamma\,.\,\gamma'. \qquad (\alpha)$$

Ἀφ' ἑτέρου, εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ κέντρον τῶν δυνάμεων λα, λβ, λγ εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον. Ἡ εἰς τὸ σημεῖον δὲ αὐτὸ ἀναγωγὴ τῶν παραλλήλων αὐτῶν δυνάμεων δίδει συνισταμένην αὐτῶν F ἴσην πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ἐπὶ λ.

$$F = \lambda(\alpha + \beta + \gamma).$$

Ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως F πρὸς τὸν ἄξονα ΔΕ θὰ εἶναι:

$$-\lambda(\alpha + \beta + \gamma)\rho, \qquad (\beta)$$

ὅπου ρ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.

Ἐπειδὴ τὰ ἀθροίσματα (α) καὶ (β) εἶναι ἴσα, θὰ ἔχωμεν

$$\rho(\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma') = -\rho\,.\,\lambda\,.\,(\alpha + \beta + \gamma) = -\lambda\,.\,2E$$

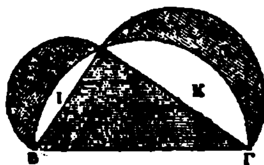
ἢ

$$\beta\beta' + \gamma\gamma' - \alpha\alpha' = 2E.$$

Σημείωσις. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι τοῦ Le Besque (N. A., 1860, σ. 437).

Μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους 534

1577. Ἐὰν ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ὡς διαμέτρων, γράψωμεν ἡμιπεριφερείας, κατὰ τὸ σχῆμα 1028, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο μηνίσκων (Μ), (Ν) εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν (Τ) τοῦ τριγώνου.



Σχ. 1028.

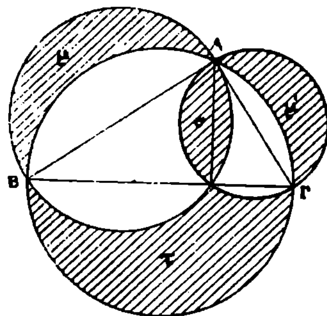
Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς ἡμιπεριφέρειαι εἶναι σχήματα ὅμοια καὶ αἱ ἐπιφάνειαί των ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν διαμέτρων των, δηλ. ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἔπεται ἀμέσως ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ἡμικυκλίου θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ἡμικυκλίων. Δηλ.

$$(M) + (I) + (N) + (K) = (T) + (I) + (K)$$

ἢ

$$(M) + (N) = (T).$$

1577 α. *Σημείωσις.* Τὸ *θεώρημα τῶν μηνίσκων* συνεπληρώθη ὑπὸ τοῦ G. Dostor ὡς ἑξῆς :



Σχ. 1098 α.

Δοθέντος ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, *ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης* ΓΒ = α *καὶ ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν* ΓΑ=β, ΒΑ = γ *ὡς διαμέτρων, γράφομεν περιφερείας* πα, πβ, πγ. *Ἐκ τῶν ἕξ ἡμιπεριφερειῶν, αἱ ἀνώτεραι τρεῖς ἐξ αὐτῶν σχηματίζουν δύο μηνίσκου* (μ), (μ'), *αἱ δὲ τρεῖς κατώτεραι ἓν καμπυλόγραμμον τμῆμα* (τ) *καὶ ἓν ἀμφίκυρτον τμῆμα* (σ).

1) *Τὸ ἄθροισμα* (μ) + (μ') *εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τριγώνου.*

2) *Ἡ διαφορὰ* (τ) — (σ) *εἶναι ἐπίσης ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τριγώνου.*

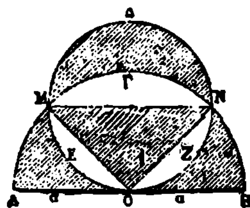
3) *Τὰ κέντρα βάρους τῶν ἐπιφανειῶν* (μ) + (μ') *καὶ* (τ)—(σ), *κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης* α, *συμμετρικῶς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην καὶ εἰς ἀπόστασιν* $\frac{\pi\alpha}{8}$ *ἀπ' αὐτῆς*. (*N. A. Mathématiques*. ἔτη 1896, σ. 296 καὶ 1899, σ. 191, ζήτημα 1732) (Dostor καὶ Audipert).

Ἡ Θεωρία τῶν γεωμετρικῶς τετραγωνισίμων μηνίσκων, κατὰ τὸν Th. Clausen (*Altona*), ὑποδεικνύει πέντε μηνίσκους. (N. A., 1849, σ. 395). Βλέπε πρὸς τούτοις καὶ *Géométrie grecque* τοῦ P. Tannery, σ. 118, n° 8.—Ἐνωρίτερον, οἱ πέντε τετραγωνίσιμοι μηνίσκοι εἶχον ἀνευρεθεῖ ὑπὸ τοῦ Wallenius (Φιννλανδία) τὸ 1776. (Κατὰ Eneström, Στοκχόλμη, I. M., 1896, σ. 201, n° 908).

Εἰς τὴν *Γεωμετρίαν τῶν μηνίσκων* ἀναφέρεται καὶ σημείωμα τοῦ Brocard εἰς *Int. d. Math.*, 1898, σ. 180, n° 908. Βλέπε ἐπίσης καὶ *Σημειώσεις* τῶν παραγράφων 1579 α καὶ 1768 α.

Ἄλλοι μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους 534—I

1578. Εἰς ἡμιπεριφέρειαν ΑΓΒ ἐγγράφομεν ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΜΟΝ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΜΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ, ἐπὶ δὲ τῆς ΜΝ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν περιφέρειαν.



Σχ. 1099.

Δείξατε ὅτι ὁ μηνίσκος ΜΓΝΔ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ τρίγωνον ΜΟΝ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν μικτογράμμων τριγώνων ΑΟΕΜ καὶ ΒΟΖΝ ἴσον ἐπίσης πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΜΟΝ.

Δυνάμεθα νὰ προβῶμεν εἰς τὴν ἐπαλήθευσιν τῶν ἀνωτέρω δύο ἰσχυρισμῶν, ἢ καὶ εἰς τὴν σύγκρισιν πρὸς ἄλληλα τῶν διαφόρων τμημάτων τοῦ σχήματος.

Ἐπειδὴ ΜΝ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὴν περιφέρειαν (ΑΒΓ) ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, θὰ ἔχωμεν

$$MN^2 = 2\rho^2 = \frac{1}{2} AB^2$$

καὶ

$$(MON) = \frac{\rho^2}{2}.$$

Εἶναι δηλ. τὸ ἡμικύκλιον ΜΔΝ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμικυκλίου ΑΓΒ καὶ τὸ κυκλ. τμῆμα ΟΕΜ τὸ ἥμισυ τοῦ κυκλ. τμήματος ΜΓΝ.

Ἐπομένως:

1) Μην. (ΜΓΝΔ) (= ἡμικ. (ΜΝΔ)) — κ. τμ. (ΜΓΝ) =

= ἡμικ. (ΜΟΝ) — (κ. τμ. ΟΕΜ + κ. τμ. ΟΖΝ)

ἢ μην. (ΜΓΝΔ) = τρ. (ΜΟΝ)

2) (ΑΟΕΜ) + (ΒΟΖΝ) = κ. τομ. (ΑΟΜ) +

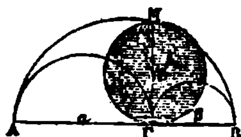
+ κ. τομ. (ΒΟΝ) — (κ. τμ. ΟΕΜ + κ. τμ. ΟΖΝ)

ἢ (ΑΟΕΜ) + (ΒΟΖΝ) = κ. τομ. (ΜΟΝΓ) — κ. τμ. (ΜΓΝ)

= τρ. (ΜΟΝ).

Θεώρημα 535

1579. Εἰς τὸ σχῆμα 1030, δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμικυκλίου ΑΜΒ μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἡμικυκλίων μὲ διαμέτρους ΑΓ καὶ ΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμικυκλίου μὲ διάμετρον ΓΜ. (Ἀρχιμήδους 4ον Λῆμμα).



Σχ. 1030.

Πρόκειται περὶ ἁπλῆς ἐπαληθεύσεως τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\gamma^2 = \alpha\beta.$$

1579 α. Σημείωσις. Τὸ μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν τοῦ σχήματος 1030 περιεχόμενον χωρίον ὠνομάσθη ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους *ἄρβηλος* ([87]), τὸ δὲ τοῦ σχήματος τοῦ ἑπομένου θεωρήματος (§ 1580) *σάλινον* ([88]). (Baltzer, *Planimétrie*, § XII, n° 3, σ. 84 τῆς γερμανικῆς ἐκδόσεως καὶ 140 τῆς ἰταλικῆς).
Βλ. ἐπίσης *La Géométrie grecque* τοῦ P. Tannery, σ. 162.

Θεώρημα 535—I

1580. Εἰς τὸ σχῆμα 1031, δείξατε ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν ἡμιπεριφερειῶν μὲ διαμέτρους ΑΒ, ΓΔ, ΑΓ καὶ ΔΒ (ΑΓ = ΔΒ) περιεχομένη ἐπιφάνεια

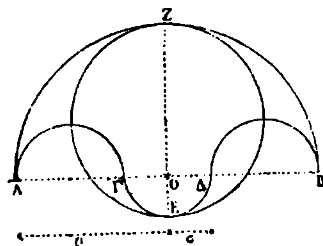
---

87. Σημ. μετ. Ἐκ τοῦ σχήματος ἑνὸς εἰδικοῦ μαχαιριδίου τῶν κατεργαζομένων τὰ δέρματα, ἀκόμη καὶ σήμερον χρησιμοποιουμένου.

88. Σημ. μετ. Ἐκ τοῦ σχήματος εἰδικῆς τινὸς ἀσπίδος τῶν ἀρχαίων.

είναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΕΖ. (Ἀρχιμήδους 14ον Λῆμμα).

Ἔχομεν:



Σχ. 1031.

$ΑΓ = ΒΔ = ρ - σ$, $ΖΕ = ρ + σ$

καὶ ἡ ἐν τῇ ἐκφωνήσει σχέσις ἀνάγεται εἰς τήν:

$$\frac{πρ^2}{2} + \frac{πσ^2}{2} - \frac{π(ρ-σ)^2}{4} = \frac{π(ρ+σ)^2}{4},$$

δηλ. εἰς ταὐτότητα.

Θεώρημα 535—II

1581. Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ περιφερείας λαμβάνομεν σημεῖον Γ εἰς τὸ τρίτον τοῦ μήκους της καὶ γράφομεν ἡμιπεριφερείας ἐπὶ τῶν ΑΓ καὶ ΒΓ στρεφούσας τὰ κοῖλα των πρὸς ἀντιθέτους διευθύνσεις.

Δείξατε ὅτι ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΓΒ διαιρεῖ τὸν ἀρχικὸν κύκλον εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον πρὸς ἄλληλα ὡς ὁ 1 πρὸς τὸν 2. Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον Γ διαιρῇ τὴν διάμετρον κατὰ μέσον καὶ ἄκρον λόγον, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ διαιρῆται καὶ ὁ ἀρχικὸς κύκλος ὑπὸ τῆς γραμμῆς ΑΓΒ.

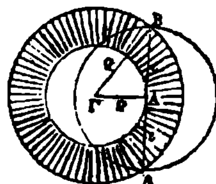
Σημείωσις. *An. de. Gergonne*, τομ. Ι, σ. 240, λύσις ὑπὸ Lhuilier, συμπληρωθεῖσα ἀργότερον (τομ. VI, 1815—1816, σ. 57) ὑπὸ τοῦ Gergonne.

Θεώρημα 536

1582. Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ δακτυλίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ εὖρος τοῦ δακτυλίου, ηὐξημένον κατὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου μὲ ἀκτῖνα τὸ εὖρος τοῦτο.

Ἔστωσαν ρ καὶ $ρ + λ$ αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δακτυλίου εἶναι

$$(Δ) = π(ρ+λ)^2 - πρ^2 = 2πρλ + πλ^2.$$



Σχ. 1032.

Παρατήρησις. Ἐπειδή, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος:

$$π(ρ+λ)^2 - πρ^2 = πΑΒ^2,$$

ὁ κύκλος μὲ διάμετρον ΒΔ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸν δακτύλιον.

Θεώρημα 536—I

1583. Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ δακτυλίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ εὖρος τοῦ δακτυλίου, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου μὲ ἀκτῖνα τὸ εὖρος τοῦτο.

Ἐπειδὴ

$$(Δ) = 2πρλ + πλ^2 = 2π(ρ+λ)λ - πλ^2.$$

Θεώρημα 536—II

1584. Ἐὰν δύο καμπύλαι ΑΒΓΔΕ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ ἀποτελοῦνται ἐξ ὁμοκέντρων κυκλικῶν τόξων, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ταινίας Τ, τῆς περιοριζομένης ὑπὸ τῶν καμπύλων αὐτῶν (καὶ τῶν ἄκρων ἀκτίνων) εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ μέσου τόξου ἐπὶ τὸ εὖρος τῆς ταινίας.

Ἄς εἶναι μ, ν, τ, σ αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἄκρων ἀκτίνων τῶν διαδοχικῶν τόξων. Ἡ θεωρουμένη ταινία εἶναι ἄθροισμα τομέων κυκλικῶν δακτυλίων ἐχόντων πάντων τὸ αὐτὸ εὖρος λ, τὰ δὲ διάφορα μέσα τόξα εἰς ἕκαστον τῶν τομέων τούτων ἀποτελοῦν μίαν συνεχῆ γραμμήν, τὸ *μέσον τόξον*.

Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τομέως κυκλικοῦ δακτυλίου:

$$E = (\text{μέσον τόξον}) \times (\text{εὖρος δακτυλίου}),$$

προκύπτει ἀμέσως ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ταινίας Τ εἶναι ἴσον:

1) *Πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ μέσου τόξου ἐπὶ τὸ εὖρος τῆς ταινίας.*

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Guldin, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἐπίσης:

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μῆκος λ τῆς γενετείρας γραμμῆς, πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ὃ γράφει τὸ μέσον αὐτῆς.

2) *Πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ μικροτέρου (μεγαλυτέρου) τόξου ἐπὶ τὸ εὖρος τῆς ταινίας, ηὐξημένον (ἠλαττωμένον) κατὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὸ εὖρος τοῦτο καὶ ἐπίκεντρον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν τῶν ἄκρων ἀκτίνων τῆς ταινίας.*

Ἡ γωνία αὕτη ὁρίζεται κατὰ τὸν ἐκτεθέντα εἰς τὴν παράγραφον 1456 τρόπον.

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης τῶν κυκλικῶν ταινιῶν ἐπεκτείνεται *καὶ εἰς τὰς ταινίας τὰς ἀποτελουμένας ἐκ δύο τυχουσῶν παραλλήλων καμπύλων.*

Ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὰς καθέτους ἀρκετὰ ἐγγὺς ἀλλήλων, ὥστε τὰ στοιχεῖα τῶν καμπύλων νὰ ἐξομοιωθοῦν πρὸς στοιχειώδη κυκλικὰ τόξα καὶ νὰ ἀναχθῶμεν οὕτω εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

2) Ἐὰν ἡ κινητὴ ἀκτίς, ἡ ἀκολουθοῦσα τὴν διεύθυνσιν τῆς μεταβλητῆς καθέτου, ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀρχικήν της θέσιν, ἡ γωνιώδης κίνησις αὐτῆς εἶναι μηδενικὴ καὶ αἱ δύο καμπύλαι εἶναι ἴσαι. *Αἱ ἄκραι κάθετοι εἶναι τότε παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς* καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ταινίας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τοῦ ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις τὸ μῆκος τῆς μιᾶς τῶν καμπύλων καὶ τὸ εὖρος τῆς ταινίας.

3) Ἐὰν ἡ κινητὴ ἀκτὶς διαγράφῃ ἓν ἡμικύκλιον, αἱ ἄκραι κάθετοι εἶναι παράλληλοι ἀλλ' ἀντιθέτων φορῶν. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ταινίας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ εὔρους λ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς ἐσωτερικῆς (ἢ ἐξωτερικῆς) καμπύλης, πλέον (ἢ ἔλαττον) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμικυκλίου ἀκτῖνος λ.

4) Ἐὰν ἡ κινητὴ ἀκτὶς Ρα διαγράφῃ ὁλόκληρον κύκλον, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ταινίας ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ εὔρους λ ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς ἐσωτερικῆς ἢ ἐξωτερικῆς καμπύλης, πλέον ἢ ἔλαττον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἀκτῖνος λ. Ἐὰν τέλος ἡ κινητὴ ἀκτὶς διαγράψῃ ν πλήρεις περιφοράς, θὰ πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ ν—πλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου μὲ ἀκτῖνα λ.

Θεώρημα 536—III

1585. Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ταινίας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς μέσης καμπύλης ἐπὶ τὸ εὖρος τῆς ταινίας, ἢ πρὸς τὸ γινόμενον τῆς εὐθείας γεννετείρας ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς καμπύλης, ἣν γράφει τὸ μέσον τῆς εὐθείας ταύτης.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς ταινίας δύναται νὰ νοηθῇ παραγομένη ὑπὸ κινητῆς καὶ σταθεροῦ μήκους εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου, κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ παραμένῃ πάντοτε κάθετος ἐπὶ τὴν καμπύλην, ἣν διαγράφει ἐν ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς. Ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται *ὁδηγὸς καμπύλη*.

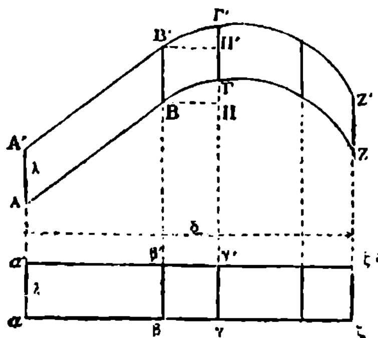
Ἡ ἰδιότης αὕτη χρησιμεύει διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς ὁδοῦ μὴ εὐθυγράμμου.

1585 α. Σημείωσις. Διὰ περισσοτέρας ἀναπτύξεις, δύναταί τις νὰ ἀνατρέξῃ εἰς τὴν δευτέραν ἔκδοσιν τῶν *Exercices de G.*, σελ. 689 κ.ἑ.

Τὰ θεωρήματα τοῦ Guldin (G., n° 903 καὶ 904), μνημονεύονται ὑπὸ τοῦ *Πάππου* ἀλλ' ἄνευ ἀποδείξεως. Ἠγνοοῦντο δὲ τελείως μέχρι τοῦ XVI αἰῶνος, ὁπότε ὁ πατὴρ Guldin ἀνεῦρε καὶ ἀπέδειξε αὐτὰ (*Histoire des sciences mathématiques et physiques*, ὑπὸ Maximilien Marie, τόμ. III, σ. 169).

Θεώρημα 536—IV

1586. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης μεταξὺ δύο καμπύλων τοιούτων, ὥστε τὰ μεταξὺ αὐτῶν τμήματα παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς ὡρισμένην διεύθυνσιν νὰ ἔχουν κοινὸν μῆκος λ, λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ μήκους τούτου ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν δ τῶν ἄκρων παραλλήλων τμημάτων.



Σχ. 1033.

Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΒ'Α' εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον αββ'α'. Ἐπίσης, τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΓ'Β' εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον βγγ'β', ἀφοῦ τὰ καμπυλόγραμμα τρίγωνα ΒΗΓ, Β'Η'Γ' εἶναι ἴσα.

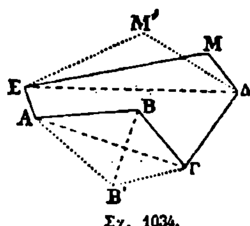
Ἐπομένως,

$$\text{ἐπιφ.}\ (\mathrm{A\Gamma ZZ'\Gamma'A'}) = \delta \cdot \lambda.$$

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦ *Clairaut* (§ 1559), δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πόρισμα τοῦ προηγουμένου. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ τοῦ *Πυθαγόρου*, πορίσματος τοῦ θεωρήματος τοῦ *Clairaut*.

Θεώρημα 537

1587. Πᾶν μὴ κυρτὸν σχῆμα ΑΒΓΔΜΕ δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἓν ἄλλο τῆς αὐτῆς περιμέτρου ἀλλὰ μεγαλυτέρας ἐπιφανείας.



Σχ. 1034.

Ἂς φέρωμεν τὴν ΑΓ καὶ ἂς ὁρίσωμεν τὸ συμμετρικὸν Β' τοῦ Β πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΒ' θὰ ἔχωμεν

$$\text{AB} = \text{AB}', \quad \Gamma\text{B} = \Gamma\text{B}',$$

καὶ τὸ κυρτὸν σχῆμα ΑΒ'ΓΔΜΕ ἔχει προφανῶς τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ ἀρχικὸν περίμετρον ἀλλὰ μεγαλύτερον ἐμβαδόν.

Παρατήρησις. Πᾶν πολύγωνον ΑΓΔΜΕ μὲ δύο ἀνίσους πλευρὰς ΜΔ, ΜΕ, δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἓν ἄλλο ΑΓΔΜ'Ε ἰσοπεριμετρικὸν πρὸς αὐτὸ ἀλλὰ μεγαλυτέρας ἐπιφανείας. (Βλ. ἐπμ., § 1676).

Θεώρημα 538

1588. Ἐκ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων πολυγώνων καὶ τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν, τὸ κανονικὸν εἶναι τὸ μέγιστον.

(*Μέθοδοι*, § 355).

Θεώρημα 539

1589. Ἐκ δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸ ἔχον τὰς περισσοτέρας πλευρὰς εἶναι καὶ τὸ μεγαλύτερον.

(*Μέθοδοι*, § 356).

Σχέσεις ἐκ τῆς θεωρήσεως τῶν ἐμβαδῶν προκύπτουσαι

Θεώρημα 540

1590. Τὰ ἐμβαδὰ δύο τυχόντων πολυγώνων Π, Π', περιγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ περίμετροι αὐτῶν π καὶ π'.

Ἐπειδή, ἂν ρ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας,

$$\frac{(\Pi)}{(\Pi')} = \frac{\frac{1}{2}\pi\rho}{\frac{1}{2}\pi'\rho} = \frac{\pi}{\pi'}.$$

Θεώρημα 541

1591. Ἔστωσαν ΑΟΔ, ΒΟΕ, ΓΟΖ τρεῖς εὐθεῖαι διὰ τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ ἀγόμεναι, τεμνόμεναι εἰς Ο καὶ τέμνουσαι τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ. Δείξατε τὴν σχέσιν:

$$\frac{\text{O}\Delta}{\text{A}\Delta} + \frac{\text{OE}}{\text{BE}} + \frac{\text{OZ}}{\Gamma\text{Z}} = 1.$$

(*Μέθοδοι*, § 165).

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν Gergonne. (*An. d. Math.*, τομ. IX, 1818 καὶ 1819, σ. 116, σημ. τοῦ Longchamps).

Θεώρημα τοῦ Viviani 542

1592. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν πλευρῶν κανονικοῦ πολυγώνου σημείου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ εὑρισκομένου, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὸ ν—πλάσιον τοῦ ἀποστήματος αὐτοῦ.

Ἔστω α ἡ πλευρὰ τοῦ πολυγώνου, δ τὸ ἀπόστημα, x_i ἡ ἀπόστασις τοῦ δοθέντος σημείου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς $A_i A_{i+1}$ καὶ ν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν. Θὰ ἔχωμεν

$$\text{Ἐμβ. πολυγώνου} = \frac{1}{2}\Sigma x_i \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}\Sigma x_i = \frac{\nu\alpha}{2}\delta,$$

ἢ

$$\Sigma x_i = \nu\delta.$$

Θεώρημα 543

1593. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀντιστρόφων τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψους τοῦ τριγώνου.

Ἐπειδή :

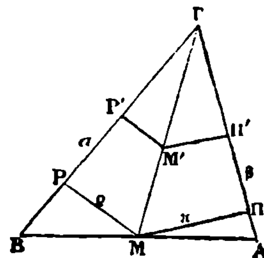
$$\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2\gamma^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha{}^2},$$

ἀφοῦ

$$2E = \beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha .$$

Θεώρημα 543—I

1594. Αἱ ἀποστάσεις τοῦ τυχόντος σημείου μιᾶς διαμέσου τριγώνου ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν πλευρῶν αὐτῶν.



Σχ. 1036.

Μολονότι ἡ πρότασις αὕτη ἀπεδείχθη ἤδη (§ 1546 α, 2)), παραθέτομεν καὶ τὴν ἑπομένην ἀπόδειξιν, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς ἐννοίας τῶν ἐμβαδῶν, ὡς τὴν πλέον φυσικήν.

Ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις διὰ μόνον τὸ σημεῖον Μ τοῦ σχήματος.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΒΜΓ καὶ ΑΜΓ εἶναι ἰσοδύναμα, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha\rho = \beta\pi \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{\rho}.$$

Θεώρημα 544

1595. Διὰ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς διχοτόμου γωνίας Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΜΟΝ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$ εἶναι σταθερὰ ποσότης.

1) Ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή.

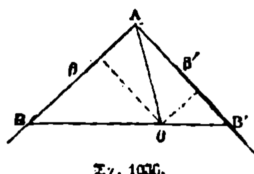
(*Μέθοδοι*, § 279).

2) Ἡ γωνία Α εἶναι τυχοῦσα.

(*Μέθοδοι*, § 280).

Θεώρημα 545

1596. Διὰ σημείου τυχόντος Ο τοῦ ἐπιπέδου ὀρθῆς γωνίας Α, φέρομεν τέμνουσαν ΒΟΒ′ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{E}+\frac{1}{E'}$, τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΟ, ΑΒ′Ο, εἶναι σταθερόν. (*Mannheim*, N. A., 1856; σ. 383).



Σχ. 1030.

Ἂς εἶναι ΑΒ = β, ΑΒ′ = β′, καὶ υ, υ′ αἱ ἐκ τοῦ Ο κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευράς. Ἐπειδὴ τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑκάστου τριγώνου εἶναι βυ καὶ βυ′, ἡ δεικτέα σχέσις $\frac{1}{E}+\frac{1}{E'}$ = στθ., ἀνάγεται εἰς τὴν

$$\frac{2}{\beta\upsilon}+\frac{2}{\beta'\upsilon'}=\frac{2(\beta\upsilon+\beta'\upsilon')}{\beta\beta'\upsilon\upsilon'}=\sigma\tau\theta.$$

Ἀλλ' εἶναι

$$\beta\upsilon+\beta\upsilon'=2(BAB')=\beta\beta'. \qquad (\alpha)$$

Ἑπομένως :

$$\frac{1}{E}+\frac{1}{E'}=\frac{2\beta\beta'}{\beta\beta'\upsilon\upsilon'}=\frac{2}{\upsilon\upsilon'}=\text{σταθερὰ ποσότης.}$$

Θεώρημα 545—I

1597. Ἡ αὐτὴ πρότασις ἀλλὰ διὰ τυχοῦσαν γωνίαν.

Ἡ σχέσις (α) γράφεται

$$\beta\upsilon+\beta\upsilon'=2(BAB')=\beta\beta'\ \eta\mu\ A.$$

Ἑπομένως :

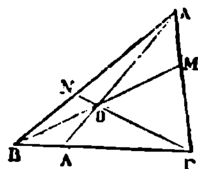
$$\frac{1}{E}+\frac{1}{E'}=\frac{2\,\eta\mu\,A}{\upsilon\upsilon'}=\text{ποσότης σταθερά.}$$

Σημείωσις. Εἰς τὸν Mannheim ὀφείλεται μέγα πλῆθος ἀριθμητικῶν σχέσεων. (Βλ.: *Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques*, ὑπὸ Mannheim). Τὸ θεώρημα τῆς παραγράφου 1593, ὡς καὶ τὸ ἑπόμενον (§ 1598), εὑρίσκονται εἰς τὸ ἔργον αὐτό.

Θεώρημα 545—II

1598. Διὰ σημείου Ο, ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ εὑρισκομένου, φέρομεν εὐθείας ΑΟΛ, ΒΟΜ, ΓΟΝ, περατουμένας εἰς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς καὶ διαιρούσας τὸ τρίγωνον εἰς ἓξ ἄλλα μικρότερα.

Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἐμβαδῶν τριῶν ἐξ αὐτῶν μὴ διαδοχικῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἴδιον ἄθροισμα διὰ τὰ τρία ἄλλα τρίγωνα (Mannheim).



Σχ. 1037.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι πόρισμα τῆς προηγουμένης. Πράγματι, διὰ τὰς διὰ τοῦ σημείου Ο δύο τεμνούσας, ΒΟΜ καὶ ΓΟΝ, τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{(\text{AOM})}+\frac{1}{(\text{AOB})}=\frac{1}{(\text{ANO})}+\frac{1}{(\text{AO}\Gamma)}.$$

Ὁμοίως,

$$\frac{1}{(\text{BON})}+\frac{1}{(\text{BO}\Gamma)}=\frac{1}{(\text{BO}\Lambda)}+\frac{1}{(\text{AOB})},$$

$$\frac{1}{(\Gamma\text{O}\Lambda)}+\frac{1}{(\text{AO}\Gamma)}=\frac{1}{(\Gamma\text{OM})}+\frac{1}{(\text{BO}\Gamma)}.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη καὶ ἁπλοποιοῦντες, λαμβάνομεν :

$$\frac{1}{(\text{AOM})}+\frac{1}{(\text{BON})}+\frac{1}{(\Gamma\text{O}\Lambda)}=$$

$$=\frac{1}{(\Gamma\text{OM})}+\frac{1}{(\text{BO}\Lambda)}+\frac{1}{(\text{AON})}.$$

Θεώρημα 545—III

1598 α. Τρεῖς εὐθεῖαι, παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τριγώνου καὶ ἀγόμεναι διὰ σημείου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου εὑρισκομένου, διαιροῦσιν αὐτὸ εἰς τρία παραλληλόγραμμα καὶ τρία τρίγωνα. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραλληλογράμμων εἶναι τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ γινομένου τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων.

(*A. d. Gergonne*, τόμ. XVIII 1827 - 1828, σ 111 καὶ 112). Λύσεις ὑπὸ Bobillier, Roche καὶ ἐπέκτασις εἰς τὸ τετράεδρον ὑπὸ Vallés (σ. 113 ἕως 123).

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν μικροτέρων τριγώνων. (*A. d. G.*, XIX, σ. 374).

Θεώρημα 546

1599. Τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τρίγωνον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τῶν ὁμοίων περιφερειῶν εἰς τὰ τρίγωνα εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ ἀρχικὸν ὑπὸ τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψους.

1) Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΗ καὶ ΑΗΒ εἶναι ὅμοια πρὸς ἄλληλα, αἱ ἀκτῖνες ρ, σ, τ, τῶν εἰς αὐτὰ ἐγγεγραμμένων περιφερειῶν, θὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοίχων ὑποτεινουσῶν. Ἄρα:

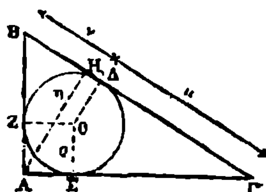
$$\frac{\alpha^2}{\rho^2}=\frac{\beta^2}{\sigma^2}=\frac{\gamma^2}{\tau^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\rho^2}{\alpha^2}=\frac{\sigma^2+\tau^2}{\beta^2+\gamma^2}=\frac{\sigma^2+\tau^2}{\alpha^2}$$

ἢ

$$\rho^2=\sigma^2+\tau^2.$$

Ἄλλη ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ

$$(\mathrm{ΑΒΓ})=(\mathrm{ΑΒΗ})+(\mathrm{ΑΓΗ}),$$



Σχ. 1038.

εἰς τὴν ὁμογενῆ ταύτην σχέσιν δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰ ἐμβαδὰ διὰ τῶν, ἀναλόγων πρὸς αὐτά, τετραγώνων ὁμολόγων μηκῶν, ἢ

$$\rho^2=\sigma^2+\tau^2.$$

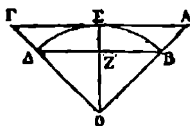
Δι' ἐπαληθεύσεως τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ ὁδηγηθῶμεν εἰς μίαν τρίτην ἀπόδειξιν (Βλ. 2αν καὶ 3ην ἔκδοσιν τῶν Ex. d. G.)

Παρατήρησις. Ἡ μέση ἀνάλογος δύο ἀνίσων εὐθειῶν μ, ν εἶναι μικροτέρα τῆς μέσης ἀριθμητικῆς αὐτῶν. Πράγματι, ἡ ΑΗ (Σχ. 1038) εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν μηκῶν ΒΗ καὶ ΗΓ καὶ εἶναι, ὡς κάθετος, μικροτέρα τῆς πλαγίας

$$\mathrm{ΑΜ}=\frac{\mathrm{ΒΓ}}{2}=\frac{\mathrm{ΒΗ}+\mathrm{ΗΔ}}{2}.$$

Θεώρημα τοῦ Du Faye 547

1600. Ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων Π καὶ Π′ καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ἄλλο περιγεγραμμένον εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὁμοίου πρὸς τὰ πρῶτα κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου Π′.



Σχ. 1039.

Ἔστω α^2 ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου Π′ καὶ τοῦ ὁποίου ΑΓ εἶναι ἡ πλευρά, β^2 ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου Π μὲ πλευρὰν ΒΔ. Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι αὗται εἶναι ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων περιφερειῶν, θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\mathrm{ΟΑ}^2}{\mathrm{ΟΒ}^2},$$

ἢ

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}=\frac{\mathrm{ΟΑ}^2-\mathrm{ΟΒ}^2}{\mathrm{ΟΒ}^2}. \qquad (1)$$

Ἔστω γ^2 ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁμοίου πρὸς τὰ δύο πρῶτα πολυ-

γώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα ΑΕ· θὰ ἔχωμεν πάλιν

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2}=\frac{ΕΑ^2}{ΟΒ^2}. \qquad (2)$$

Ἀλλ' εἶναι: $ΕΑ^2 = ΟΑ^2 - ΟΕ^2 = ΟΑ^2 - ΟΒ^2.$

Ἑπομένως, διὰ συγκρίσεως τῶν (1) καὶ (2) σχέσεων:

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}=\frac{\gamma^2}{\beta^2},$$

ἤ

$$\alpha^2-\beta^2=\gamma^2.$$

Θεώρημα 547—I

1601. Ἡ ἰδία διαφορὰ $\alpha^2-\beta^2$ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὁμοίου πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον τὴν πλευρὰν ΒΔ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου Π.

Σημείωσις. Τὰ προηγούμενα δύο θεωρήματα εἶναι τοῦ *Du Faye* (1698 - 1739), μέλους τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν (N. A., 1845, σ. 55).

Θεώρημα 548

1602. Ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐκ 2ν πλευρῶν καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ἄλλο περιγεγραμμένον εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀντιστοίχων τῶν προηγουμένων δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐκ ν πλευρῶν.

Σχ. 1010.

Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ τὰ ἡμίση τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων ἐκ ν πλευρῶν· ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι ἴση πρὸς 2ν φορὰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ. Ἂν δὲ ΑΔ, ΕΖ εἶναι αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων ἐκ 2ν πλευρῶν, ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν των θὰ εἶναι πάλιν ἴση πρὸς 2ν φορὰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΔΖ.

Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι:

$$(ΑΔΖ) < \frac{1}{4}(ΑΒΓΔ)$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον καὶ τὸ τραπέζιον ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΔ, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ βάσις ΔΖ τοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ τετάρτου τοῦ ἀθροίσματος τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.

Ἐπειδὴ ἡ ΟΖ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΔ, τὸ σχῆμα ΑΖ ΔΘ εἶναι ῥόμβος· ἄρα

$$ΔΖ = ΑΘ \quad \text{καὶ} \quad ΔΖ < ΖΓ,$$

αἱ δὲ παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ δίδουν τὴν σχέσιν

$$\frac{ΑΘ}{ΒΘ}=\frac{ΓΖ}{ΔΖ}, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad ΑΘ^2 = ΒΘ \,.\, ΓΖ.$$

Ἀλλ' ὡς γνωστόν, ἡ μέση ἀνάλογος ΑΘ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ΒΘ καὶ ΓΖ (§ 1529, *Παρατήρησις*):

$$ΑΘ < \frac{1}{2}(ΒΘ + ΓΖ),$$

καὶ ἐπειδὴ

$$ΑΘ = \frac{1}{2}(ΑΘ + ΔΖ),$$

διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$2ΑΘ < \frac{1}{2}(ΑΒ + ΔΓ) \quad ἢ \quad ΑΘ < \frac{1}{4}(ΑΒ + ΔΓ).$$

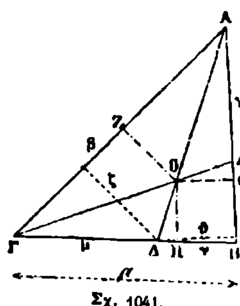
Θεώρημα 549

1803. Δι' ἑκάστης κορυφῆς τριγώνου φέρομεν εὐθεῖαν διαιροῦσαν τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὰ πλευρῶν. Δείξατε ὅτι αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. (P. Hossard, 1848, N.A., σ. σ. 407, 454).

Ἔστω ΑΔ τοιαύτη, ὥστε $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\beta^2}{\gamma^2}$.

Α'. Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὰς καθέτους ζ καὶ θ ἐπὶ τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

Τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΔΒ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐκ τῆς κοινῆς κορυφῆς Α ὕψος καὶ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ μήκη μ καὶ ν. Ἄρα



Σχ. 1041.

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{(ΑΔΓ)}{(ΑΔΒ)} = \frac{\beta\zeta}{\gamma\theta}.$$

Ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν:

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\beta^2}{\gamma^2},$$

ἕπεται:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\zeta}{\theta},$$

ἢ: ὁ λόγος τῶν καθέτων ΟΖ, ΟΘ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν β καὶ γ:

$$\frac{ΟΖ}{ΟΘ} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Ἔστω ΓΛ δευτέρα εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε $\frac{ΛΑ}{ΛΒ} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΟΖ}{ΟΘ} = \frac{\beta}{\gamma} \quad καὶ \quad \frac{ΟΖ}{ΟΗ} = \frac{\beta}{\alpha},$$

ἢ

$$\frac{ΟΖ}{\beta} = \frac{ΟΘ}{\gamma}, \quad \frac{ΟΖ}{\beta} = \frac{ΟΗ}{\alpha}.$$

ἄρα:

$$\frac{ΟΘ}{\gamma} = \frac{ΟΗ}{\alpha} \quad καὶ \quad \frac{ΟΘ}{ΟΗ} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ἀνήκει δηλαδὴ τὸ σημεῖον Ο εἰς τὴν διὰ τῆς κορυφῆς Β εὐθεῖαν, τὴν ἀνάλογον πρὸς τὰς ΑΔ καὶ ΓΛ.

Β'. Ἀπόδειξις. Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ θεωρήματος τοῦ Céva (§ 1240) μᾶς ὁδηγεῖ εἰς ἁπλῆν λύσιν. Ἔστω πράγματι Κ τὸ σημεῖον ὅπου ἡ τρίτη εὐθεῖα διὰ τῆς κορυφῆς Β συναντᾷ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΑΓ. Θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\frac{ΑΛ}{ΒΛ}=\frac{β^2}{α^2}, \quad \frac{ΒΔ}{ΓΔ}=\frac{γ^2}{β^2}, \quad \frac{ΓΚ}{ΑΚ}=\frac{α^2}{γ^2}$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{ΑΛ . ΒΔ . ΓΚ}{ΒΛ . ΓΔ . ΑΚ}=\frac{β^2γ^2α^2}{α^2β^2γ^2}=1.$$

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον Ο εἶναι ἐκεῖνο, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ἐλάχιστον (Ν. Α., 1848, σ. 407).

1603 α. Σημείωσις. Αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΓΛ, ... εἶναι αἱ συμμετροδιάμεσοι τοῦ τριγώνου καὶ ἡ τομὴ των Ο τὸ *σημεῖον τοῦ Lemoine* τοῦ τριγώνου. Ὁ Lemoine ὑπέδειξεν τὸ 1873 (Ν. Α., σ. 364) τὴν σπουδαιότητα τοῦ σημείου τούτου εἰς σχετικὴν μελέτην, ἥτις ὑπῆρξεν ἡ ἀφετηρία τῆς δημιουργίας τῆς *Νεωτέρας Γεωμετρίας τοῦ τριγώνου*. Ἐν τούτοις, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶχεν καὶ προηγουμένως ἀνευρεθεῖ ὑπὸ πολλῶν μαθηματικῶν, δι' ἐρευνῶν ἐπὶ θεμάτων ἀσχέτων πρὸς ἄλληλα. Δυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν σχετικῶς τὸν Mathieu (1865, Ν. Α., σ. 403), τὸν Catalan (1852, *Tréorèmes et problèmes de Géométrie*, 2α ἔκδ., σ. 161), τὸν Hossard (1848, Ν. Α. σ. 454) κλπ.

Θεώρημα 549—I

1603 β. **Αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΚ, ΓΛ (σχ. 1041) τέμνονται ἐπίσης κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ὅταν συμβαίνῃ:**

$$\frac{ΑΛ}{ΒΛ}=\frac{β^μ}{α^μ}, \quad \frac{ΒΔ}{ΓΔ}=\frac{γ^μ}{β^μ}, \quad \frac{ΓΚ}{ΑΚ}=\frac{α^μ}{γ^μ}.$$

Πράγματι, θὰ εἶναι πάλιν

$$\frac{ΑΛ . ΒΔ . ΓΚ}{ΒΛ . ΓΔ . ΑΚ}=\frac{β^μ . γ^μ . α^μ}{α^μ . β^μ . γ^μ}=1.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν $μ=1$, λαμβάνομεν τὰς ἐσωτερικὰς διχοτόμους τοῦ τριγώνου, διὰ $μ=2$ τὰς συμμετροδιαμέσους καὶ διὰ $μ=0$ τὰς διαμέσους αὐτοῦ. Διὰ $μ<0$, ἔχομεν τὰς *ἀντιστρόφους εὐθείας* τοῦ Longchamps· λ. χ. εἰς $μ=-1$ ἀντιστοιχοῦν αἱ ἀντίστροφοι τῶν διχοτόμων κλπ.

Θεώρημα 550

1604. **Τὸ γινόμενον τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τρίγωνον καὶ τῶν ἀκτίνων τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου.**

Ἐπειδή:

$$ρ=\frac{Ε}{τ}, \quad ρ_α=\frac{Ε}{τ-α}, \quad ρ_β=\frac{Ε}{τ-β}, \quad ρ_γ=\frac{Ε}{τ-γ},$$

καὶ $$\rho\rho_\alpha\,\rho_\beta\,\rho_\gamma = \frac{E^4}{\tau\,.\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)} = \frac{E^4}{E^2} = E^2.$$

Σημείωσις. Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ τύπου

$$E = \sqrt{\tau\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)},$$

ἀποδίδεται εἰς τὸν Fibonacci, ἐπονομαζόμενον καὶ *Λεονάρδον τῆς Πίζης*.

Θεώρημα 551

1605. **Τὸ ἀντίστροφον τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἀκτίνων τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν.**

Ἐπειδή:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\tau}{E}, \quad \frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{\tau-\alpha}{E}, \quad \frac{1}{\rho_\beta} = \frac{\tau-\beta}{E}, \quad \frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{\tau-\gamma}{E},$$

καὶ

$$\frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{\tau-\alpha+\tau-\beta+\tau-\gamma}{E} = \frac{3\tau-2\tau}{E} = \frac{\tau}{E} = \frac{1}{\rho}.$$

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τῆς § 1604 εἶναι τοῦ Mahieu (1807), ἂν καὶ ὁ Lhuilier τὸ 1809 ἀνεῦρε ἐπίσης τὴν ἰδίαν σχέσιν (*A. d. G.*, τόμ. I (1810-1811), σ. 150, παραπομπὴ καὶ τόμ. XIX, σ. 87).

Τὸ θεώρημα τῆς § 1605 εἶναι τοῦ Steiner (*A. d. G.*, τόμ. XIX (1828-1829), σ. 86 καὶ 90), τὰ δὲ τῶν §§ 1606 καὶ 1607 εὑρίσκονται εἰς *A. d. G.*, τόμ. XIX (1828-1829), σ. 211 καὶ ἑπμ., ὡς καὶ τὸ τῆς § 1184.

Θεώρημα 552

1606. **Τὸ ἀντίστροφον τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν τριῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου.**

Ἄς εἶναι υ_α, υ_β, υ_γ τὰ τρία ὕψη. Ἐπειδή:

$$2E = 2\tau\rho = \alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta = \gamma\upsilon_\gamma$$

ἢ

$$\frac{2\tau}{\frac{1}{\rho}} = \frac{\alpha}{\frac{1}{\upsilon_\alpha}} = \frac{\beta}{\frac{1}{\upsilon_\beta}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\upsilon_\gamma}} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}} = \frac{2\tau}{\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}},$$

ἕπεται

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma}.$$

Θεώρημα 552—I

1607. **Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἀκτίνων τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ὑψῶν.**

Ἐπειδή, ὡς εἴδομεν:

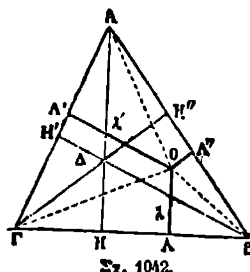
$$\frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma}.$$

Σημείωσις. Διὰ τὰς προτάσεις τῶν §§ 1606 καὶ 1607, βλ. εἰς *A. d. G.*, τόμ. XIX (1828 - 1829), σ. 212, ἀξιοσημείωτον ἄρθρον ὑπὸ L. P. F. R., συμπληροῦν μίαν ἐπίσης ἀξιόλογον σχετικὴν μελέτην τοῦ Steiner (ὡς ἄνω, σ. 85) καὶ ὅπου ἀναφέρεται καὶ ἓν ὑπόμνημα τοῦ Bobillier. Θὰ πρέπει νὰ ἀναγνωρισθῇ ὅτι τὰ *Annales de Gergonne* ἀξίζουν νὰ ἀνασυρθοῦν καὶ πάλιν εἰς τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος· ἐπειδὴ ἐκτὸς τοῦ ὅτι εὑρίσκονται εἰς αὐτὰ μελέται μεγάλου ἐνδιαφέροντος περιέχουν καὶ ζητήματα τὰ ὁποῖα ἀργότερον ἐνεφανίσθησαν ὡς νέα.

Θεώρημα 553

1608. *Ἐὰν ἐκ σημείου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τριγώνου φέρωμεν καθέτους λ, λ', λ'' ἐπὶ τὰς πλευρὰς α, β, γ αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν*

$$\frac{\lambda}{\upsilon}+\frac{\lambda'}{\upsilon'}+\frac{\lambda''}{\upsilon''}=1.$$



Σχ. 1042.

Ἄς εἶναι Λ, Λ', Λ'' τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΒΟΓ, ΓΟΑ, ΑΟΒ ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΑΒΓ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν, θὰ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ἀντίστοιχα ὕψη των λ καὶ υ :

$$\frac{\Lambda}{E}=\frac{\lambda}{\upsilon}.$$

Ἀναλόγως,

$$\frac{\Lambda'}{E}=\frac{\lambda'}{\upsilon'},\quad \frac{\Lambda''}{E}=\frac{\lambda''}{\upsilon'}.$$

Ἄρα:

$$\frac{\lambda}{\upsilon}+\frac{\lambda'}{\upsilon'}+\frac{\lambda''}{\upsilon''}=\frac{\Lambda+\Lambda'+\Lambda''}{E}=\frac{E}{E}=1.$$

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ θεώρημα τῆς § 1606 εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἀνωτέρου. Πράγματι, διὰ Ο συμπῖπτον πρὸς τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, λαμβάνομεν

$$\frac{\rho}{\upsilon}+\frac{\rho}{\upsilon'}+\frac{\rho}{\upsilon''}=1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon'}+\frac{1}{\upsilon''}=\frac{1}{\rho}.$$

2) Τὸ θεώρημα ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ λ, λ', λ'' εὐθύγραμμα τμήματα, ἀπὸ τοῦ σημείου Ο ἀρχόμενα μέχρι τῶν πλευρῶν, καὶ παράλληλα πρὸς τρεῖς εὐθείας, ἀγομένας διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου καὶ διερχομένας διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

1609. Θεώρημα. Θὰ εἶναι ἐπίσης (σχ. 1042):

$$\frac{A\Delta}{\upsilon}+\frac{B\Delta}{\upsilon'}+\frac{\Gamma\Delta}{\upsilon''}=2.$$

Πράγματι, ἐπειδὴ

$$\frac{\Delta H}{\upsilon}+\frac{\Delta H'}{\upsilon'}+\frac{\Delta H''}{\upsilon''}=1,$$

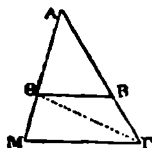
καὶ
$$\frac{ΑΔ}{υ}+\frac{ΔΗ}{υ}=\frac{ΑΗ}{υ}=1,$$
$$\frac{ΒΔ}{υ}+\frac{ΔΗ'}{υ'}=1,$$
$$\frac{ΓΔ}{υ''}+\frac{ΔΗ''}{υ''}=1.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν τριῶν τελευταίων ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων ἰσοτήτων καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν πρώτην, καταλήγομεν ἀμέσως εἰς τὴν δεικτέαν.

Παρατήρησις. Βλέπε, σχετικῶς πρὸς τὰς διαφόρους σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, τὸ ἤδη προμνησθὲν (§ 1185 α) ἔργον τοῦ Vuibert.

Θεώρημα 553—I

1610. **Τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΘΒ καὶ ΑΜΓ (σχ. 1043, ΘΒ παράλληλος πρὸς ΜΓ), μέσον ἀνάλογον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΘΓ.**



Σχ. 1043.

Πράγματι, τὰ τρίγωνα ΑΘΒ, ΑΘΓ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐκ τοῦ Θ ὕψος· ἄρα
$$\frac{(ΑΘΒ)}{(ΑΘΓ)}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ},$$
Ὁμοίως,
$$\frac{(ΑΘΓ)}{(ΑΜΓ)}=\frac{ΑΘ}{ΑΜ}.$$
Ἐπομένως,
$$\frac{(ΑΘΒ)}{(ΑΘΓ)}=\frac{(ΑΘΓ)}{(ΑΜΓ)}.$$
ἢ
$$(ΑΘΓ)^2=(ΑΘΒ)(ΑΜΓ).$$

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἑπομένου.

Θεώρημα 554

1611. **Ἐὰν δύο τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΒΓ ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς των παραλλήλους καὶ τὸ πρῶτον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ δευτέρου, πᾶν τρίγωνον ΜΝΛ, περιγεγραμμένον εἰς τὸ πρῶτον καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ δεύτερον, ἔχει ἐπιφάνειαν ἴσην πρὸς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο τριγώνων.**

Ἂς εἶναι ΘΕΡ ἡ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος πρὸς τὰς πλευρὰς ΔΖ καὶ ΑΓ, τέμνουσα εἰς Θ τὴν ΒΖΗ καὶ εἰς Ρ τὸ ὕψος ΒΡΤΣ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ σχήματος
$$(ΔΘΖ)=(ΔΕΖ),$$
$$(ΔΜΕ)=(ΔΒΕ),$$
$$(ΔΛΖ)=(ΔΗΖ),$$
$$(ΕΝΖ)=(ΕΒΖ).$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων λαμβάνομεν:

$$(\Lambda M N) = (\Delta B H).$$

Τὰ τρίγωνα ΘΔΖ καὶ ΒΔΗ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐκ τοῦ Δ ὕψος καὶ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των. Ἄρα

$$\frac{(\Delta E Z)}{\Lambda M N} = \frac{(\Theta \Delta Z)}{(B \Delta H)} = \frac{\Theta Z}{BH} = \frac{PT}{B\Sigma} = \frac{E\Pi}{B\Sigma} = \text{ἐπομένως πρὸς } \frac{\Delta Z}{A\Gamma}, \quad (1)$$

ἀφοῦ τὰ τρίγωνα ΔΕΖ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια. Ἀφ' ἑτέρου,

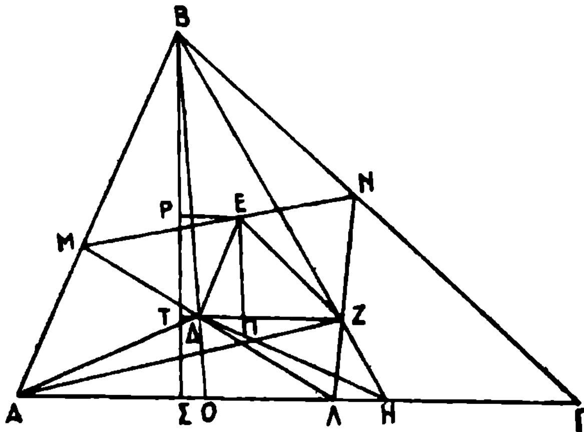
$$\frac{(B\Delta H)}{(BOH)} = \frac{B\Delta}{BO},$$

ἢ

$$\frac{(B\Delta H)}{(BOH)} = \frac{\Delta Z}{OH}, \quad (2)$$

καὶ

$$\frac{(BOH)}{(AB\Gamma)} = \frac{OH}{A\Gamma}. \quad (3)$$



Σχ. 1044
(Θ ἡ τομὴ τῶν ΡΕ καὶ ΒΗ).

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (2) καὶ (3), εὑρίσκομεν:

$$\frac{(B\Delta H)}{(AB\Gamma)} = \frac{(\Lambda M N)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta Z}{A\Gamma} = (\text{ἐκ τῆς } (1))\, \frac{(\Delta E Z)}{(\Lambda M N)}.$$

Δηλαδή:

$$(\Lambda M N)^2 = (AB\Gamma)(\Delta E Z).$$

Ἄλλη ἀπόδειξις. Ἂς θέσωμεν $A\Gamma = \beta$, $B\Sigma = \upsilon$, $\Delta Z = \beta'$, $E\Pi = \upsilon'$. Ὡς εἴδομεν τὸ ἐμβαδὸν σ τοῦ τριγώνου ΛΜΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τοῦ τετραπλεύρου ΒΖΑΔΒ, ἀφοῦ

$$(\Lambda M N) = (B\Delta H) = (B\Delta Z) + (\Delta Z H) = (B\Delta Z) + (\Delta Z A).$$

Ἐπομένως

$$\sigma = \frac{(\Delta Z).(BT)}{2} + \frac{(\Delta Z).(\Sigma T)}{2} = \frac{\upsilon.\beta'}{2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ

$$\frac{(AB\Gamma)}{\sigma} = \frac{(A\Gamma).(B\Sigma)}{(\Delta Z).(B\Sigma)} = \frac{(A\Gamma)}{(\Delta Z)} = \frac{\beta}{\beta'},$$

καὶ

$$\frac{\sigma}{(\Delta EZ)} = \frac{\upsilon\beta'}{\beta'.\upsilon'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'} = \frac{\beta}{\beta'},$$

συνάγομεν ἀμέσως ὅτι:

$$\sigma^2 = (\Delta EZ)(AB\Gamma).$$

Σημείωσις. Ὁ Catalan εἰς τὰ *Tréorèmes et Problèmes* (6η ἔκδ., σ. 182), θεωρεῖ τὴν πρότασιν ταύτην ὡς χρονολογουμένην ἀπὸ τοῦ 1862, μολονότι προετάθη ὑπὸ τοῦ Gergonne καὶ ἀπεδείχθη ὑπὸ τοῦ Léon Anne τὸ 1844 εἰς τὴν σ. 27 τῶν *N. An. des mathém.*— Εἰς πολλὰς περιπτώσεις εἶναι πολὺ δύσκολος ἡ ἀνεύρεσις τῆς πατρότητος ἑνὸς θεωρήματος. Βλ. σημ. § 1603 β.

Θεώρημα 554—I

1612. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγώνων μὲ κορυφάς, ἀφ' ἑνὸς τὰ κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν καὶ ἀφ' ἑτέρου τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας. (N. A., 1880, σ. 59. Weill).

Ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ὁμοιόθετα ἀλλήλων, ἀναγόμεθα ἀμέσως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα.

Θεώρημα τοῦ Cesaro 554—II

1612 α. Δύο τρίγωνα MNP, M'N'P' εἶναι περιγεγραμμένα εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ὅμοια πρὸς τρίτον αβγ καὶ μὲ καθέτους τὰς ὁμολόγους πλευρὰς των MN, M'N' κλπ. (Σχ. 1044 α). Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι σταθερὸς ἀριθμός.

Τὰ σημεῖα ΜΜ' θὰ κινοῦνται, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κ. τόξου, τοῦ διερχομένου διὰ τῶν Β, Γ καὶ δεχομένου γωνίαν α. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι προφανῶς διαμετρικὰ τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεών των ΜΠ — Μ'Π' ἀπὸ τῆς εὐθείας ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν δ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς ΒΓ — δηλ. σταθερὸν μῆκος. Ἐπομένως

$$(BM\Gamma) - (BM'\Gamma) = \gamma_1 \text{ καὶ ἀναλόγως } (AN\Gamma) - (AN'\Gamma) = \gamma_2,$$

$$(APB) - (AP'B) = \gamma_3, \ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \text{ σταθεραί}).$$

Ἀλλ' εἶναι

$$(MNP) = (AB\Gamma) + (BM\Gamma) + (\Gamma NA) + (APB)$$

$$(M'N'P') = (AB\Gamma) - (BM'\Gamma) - (\Gamma N'A) - (AP'B).$$

Ἐπομένως,

$$(MNP) + (M'N'P') = 2\,(AB\Gamma) + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \text{σταθερὸς ἀριθμός}.$$

Παρατήρησις. 1) Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις προϋποθέτει ὅτι τὸ τρίγωνον ΜΝΡ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ ΑΒΓ καὶ τὸ Μ'Ν'Ρ' ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, ἀλλ' ἡ γενικὴ πορεία τῆς ἀποδείξεως παραμένει ἡ αὐτὴ διὰ πάσας τὰς περιπτώσεις.

2) Τὸ σταθερὸν ἄθροισμα (ΜΝΡ) + (Μ'Ν'Ρ') εἶναι ἴσον πρὸς

Σχ. 1044 α.

τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τῶν κέντρων τῶν τριῶν περιφερειῶν. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης ποριζόμεθα μίαν δευτέραν ἀπόδειξιν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως (J. N.).

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐδημοσιεύθη τὸ 1883 εἰς τὴν *Mathesis* (1883, σ. 23, ζτμ. 201 καὶ 1884, σ. 66) ὑπὸ τοῦ Ε. Cesaro σπουδαστοῦ τότε εἰς τὴν *Ecole des Mines* τῆς Λιέγης. Ἡ λύσις τὴν ὁποίαν ἐδώσαμεν εἶναι τοῦ Fauchamps.

Θεώρημα 555

1613. **Ἔστω ΑΒΓΔ τυχὸν τετράπλευρον. Δείξατε ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Ο, τῶν τοιούτων, ὥστε**

$$(\text{ΑΟΔ}) + (\text{ΓΟΒ}) = (\text{ΑΟΒ}) + (\text{ΓΟΔ}),$$

εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου (Léon Anne).

Ἔστω ΜΝ ἡ εὐθεῖα αὐτη. Ἐπειδὴ αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου ἀπ' αὐτῆς εἶναι ἀνὰ δύο ἴσαι, τὰ τρίγωνα τῆς αὐτῆς βάσεως, κειμένης ἐπὶ τῆς ΜΝ, καὶ κορυφῶν Α, Γ ἢ Β, Δ εἶναι ἀνὰ δύο ἰσοδύναμα.

'Αφ' ἑτέρου, ἔχομεν

$$(AOB) = (AMB) + (AOM) + (BOM),$$
$$(\Delta O\Gamma) = (\Delta M\Gamma) - (\Gamma OM) - (\Delta OM).$$

Καὶ ἐπειδή:

$$(AOM) = (\Gamma OM), \quad (BOM) = (\Delta OM),$$

θὰ εἶναι

$$(AOB) + (\Delta O\Gamma) = (AMB) + (\Delta M\Gamma). \qquad (1)$$

'Επίσης,

$$(AO\Delta) = (AM\Delta) + (\Delta OM) - (AOM),$$
$$(\Gamma OB) = (\Gamma MB) - (BOM) + (\Gamma OM),$$

καὶ ἑπομένως

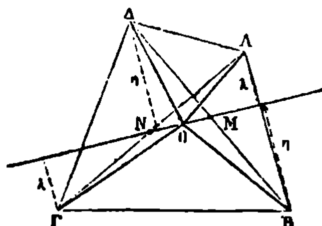
$$(AO\Delta) + (\Gamma OB) = (AM\Delta) + (\Gamma MB). \qquad (2)$$

'Επειδὴ αἱ AM, ΔN εἶναι διάμεσοι τῶν τριγώνων AΔB καὶ AΔΓ, τὰ τρίγωνα AMB καὶ AMΔ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς καὶ τὰ τρίγωνα ΔMΓ καὶ BMΓ. Κατὰ συνέπειαν

$$(AO\Delta) + (\Gamma OB) = (AOB) + (\Gamma O\Delta).$$

ἐκ συγκρίσεως τῶν σχέσεων (1) καὶ (2).

Παρατήρησις. Τὸ τμῆμα τοῦ τόπου, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ὡς ἄνω διατύπωσιν τῆς προτάσεως, εἶναι τὸ περιεχόμενον ἐντὸς τοῦ τετραπλεύρου. Τὸ ἐκτὸς τοῦ τετραπλεύρου τμῆμα τῆς εὐθείας MN, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἰδίαν πρότασιν, ἀλλὰ μὲ ἀλλαγὴν σημείων εἰς τοὺς ὅρους τῆς σχέσεως τῆς ἐκφωνήσεως. (*J. M. E.*, 1879, σ. 29.—Bourget).



Σχ. 1055.

Σημείωσις. 'Η εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῶν μέσων τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου — *ἡ εὐθεῖα τοῦ Νεύτωνος* (§ 1233 α) — συναντᾶται συχνὰ εἰς διάφορα ζητήματα ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ σχήματος αὐτοῦ. Βλ. σχετικῶς: *Int. d. Math.*, 1907, σ. 267, πρόβλημα 3313 τοῦ K. Hagge καὶ τὴν λύσιν αὐτοῦ (1909, σ. 252) ὑπὸ τοῦ Welsch. Εἰς τὸν τελευταῖον τοῦτον ἀνήκουν πολλὰ ἐνδιαφέροντα ἄρθρα δημοσιευθέντα εἰς τὸ *I. d. M.* κατὰ τὰ ἔτη 1908 καὶ 1909.

Θεώρημα τοῦ Νεύτωνος 556

1614. **'Η συνδέουσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων περιγραψίμου τετραπλεύρου εὐθεῖα, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.**

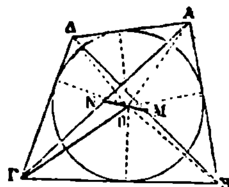
'Η πρότασις αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος τοῦ Léon Anne. Πράγματι, διὰ τὸ κέντρον O τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας ἰσχύει ὅτι

$$(\Gamma OB) + (AO\Delta) = (AOB) + (\Gamma O\Delta),$$

ἀφοῦ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας (O) ὡς κοινὸν ὕψος καὶ (§§ 744, 745)

ΓΒ + ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ.

Ἀνήκει κατὰ συνέπειαν τὸ σημεῖον τοῦτο εἰς τὸν τόπον ΜΝ τῆς προηγουμένης προτάσεως.



Σχ. 1010.

1614 α. Πόρισμα. *Διὰ πᾶν τρίγωνον, ἡ εὐθεῖα ἥτις συνδέει τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς μετὰ τοῦ μέσου τῆς συνδεούσης τὴν ἀπέναντι κορυφὴν μετὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῆς πλευρᾶς ταύτης καὶ μιᾶς παρεγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας.*

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Νεύτωνος εὑρίσκεται καὶ εἰς τὰ *Théorèmes et Problèmes de Géométrie* τοῦ Catalan (6η ἔκδ., σ. 127). Στηρίζεται δὲ ἐπὶ δύο *λημμάτων*, τοῦ πορίσματος II τοῦ θεωρήματος LVI καὶ τοῦ θεωρήματος LVII (σ. 125).

Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἑπομένου γενικωτέρου :

Ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν κωνικῶν τομῶν, αἵτινες ἐγγράφονται εἰς δοθὲν τετράπλευρον, εἶναι ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων εὐθεῖα.

(Βλ. *Mathesis*, 1898, σ. 194, n° 19).

Σημείωσις. Τὸ προηγούμενον πόρισμα, μολονότι ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Gergonne, ἀνήκει εἰς τὸν J.-B. Durrande (1797 - 1825). (*A. d. G.*, τόμος XIV 1823 - 1824, σ. σ. 309 καὶ 313).

Θεώρημα 557

1615. *Ἡ μικροτέρα εὐθεῖα ΒΕΔ, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν διὰ δοθέντος σημείου Ε ἐντὸς δοθείσης γωνίας Α, ὁρίζεται διὰ τῆς ἑπομένης συνθήκης :*

Ἡ εἰς τὸ σημεῖον Ε κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν καὶ αἱ εἰς τὰ Β καὶ Δ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, πρέπει νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 168).

1615 α. ***Σημείωσις.*** 1) Διὰ τὴν στοιχειώδη σπουδὴν τοῦ ζητήματος, βλ. *Mathesis*, 1907, σ. 68 (*J. N.*) καὶ σ. 240, n° 21 (Malaise).

2) Ἡ ἐλαχίστη αὕτη εὐθεῖα ὀνομάζεται πολλάκις ὑπὸ τῶν ἄγγλων συγγραφέων καὶ *εὐθεῖα τοῦ Φίλωνος*. Ἐπειδὴ ἐμφανίζεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ γεωμέτρου τούτου τοῦ περιφήμου προβλήματος τῆς εὑρέσεως δύο μέσων ἀναλόγων.

Int. d. Math., 1902, σ. 299, n° 1782. Σημείωσις Archibald, Sackville, (Καναδᾶς).

3) Σχετικὸν πρὸς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι καὶ τὸ ἀκόλουθον *Θεώρημα τοῦ Liouville*, ἀποδειχθὲν ὑπὸ τοῦ P. Serret (*N. A.*, 1852, σ. 123) :

Ἔστω AOB *σταθερὰ γωνία περιγεγραμμένη εἰς ἔλλειψιν καὶ* MN *ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης τοιαύτη, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἀποτεμνόμενον τμῆμα* MN *αὐτῆς νὰ εἶναι τὸ ἐλαχίστου μήκους. Τὰ σημεῖα* M, N *ἴσον ἀπέχουν τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως.*

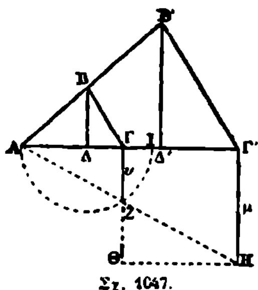
Διὰ τὴν παραβολήν, ἡ εὐθεῖα MN εἶναι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὴν κορυφὴν τῆς καμπύλης.

Κατασκευαὶ σχημάτων

Πρόβλημα 558

1616. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν γωνιῶν του καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ του μ^2.

Κατασκευάζομεν τρίγωνον τυχὸν ΑΒΓ, ὅμοιον τοῦ ζητουμένου, προεκτείνομεν τὴν βάσιν του ΑΓ κατὰ μῆκος ΓΙ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ΒΔ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΙ γράφομεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΖΙ. Ἡ κάθετος ΓΖ $=\upsilon$ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΑΒΓ τετραγώνου· ἐπειδὴ



Σχ. 1047.

$$\upsilon^2 = \text{ΑΓ} . \text{ΓΙ}.$$

Ἐπὶ τῆς ΓΖ λαμβάνομεν μῆκος ΓΘ ἴσον πρὸς μ, φέρομεν τὴν ΑΖΗ, τὴν ΘΗ παράλληλον τῆς ΑΓ, τὴν ΗΓ' κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ τὴν Γ'Β' παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ.

Τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ' εἶναι τὸ ζητούμενον. Πράγματι, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒ'Γ' εἶναι ὅμοια, ὡς καὶ τὰ ΑΓΖ, ΑΓ'Η· ἑπομένως:

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΒ'Γ'})} = \frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΑΓ'}^2} = \frac{(\text{ΓΖ})^2 = \upsilon^2}{(\text{Γ'Η})^2 = \mu^2}.$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν ἄκρων λόγων εἶναι ἴσοι, καὶ οἱ παρονομασταὶ αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσοι. Ἄρα:

$$(\text{ΑΒ'Γ'}) = \mu^2.$$

Πρόβλημα 559

1617. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν τριῶν ὑψῶν του α', β', γ'.

Ἐπειδὴ $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = 2\text{Ε}$, θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha'}} = \frac{\beta}{\frac{1}{\beta'}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\gamma'}}$$

καὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἔχον μήκη πλευρῶν ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστροφα τῶν μηκῶν τῶν ὑψῶν α', β' γ'.

Κατασκευή. Λαμβάνομεν ἐπ' εὐθείας μήκη ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ὕψη α', β', γ' (Σχ. 1047 α), ὑψοῦμεν κάθετον ΡΣ $=\delta$ καὶ γράφομεν τὰς ἡμιπεριφερείας ΛΡΛ', ΜΡΜ', ΝΡΝ'. Μὲ τὰ τμήματα ΡΛ', ΡΜ', ΡΝ', ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς

$$\frac{\delta^2}{\text{ΡΛ}} = \frac{\delta^2}{\alpha'}, \quad \frac{\delta^2}{\beta'}, \quad \frac{\delta^2}{\gamma'},$$

κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΒ'Γ' (Σχ. 1047 β). Τὸ τρίγωνον τοῦτο

εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον καὶ ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρωμεν κάθετον ΑΔ' ἐπὶ τὴν Β'Γ', ἴσην πρὸς τὸ ὕψος α', εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Δ παράλληλος πρὸς τὴν Β'Γ' ὁρίζει τρίγωνον ΑΒΓ ἀπαντῶν εἰς τὸ πρόβλημα.

Σχ. 1047|α

Σχ. 1047 β

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta'}{\alpha'}=\frac{\beta'.\gamma'}{\alpha'.\gamma'},\quad \frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma'}{\beta'}=\frac{\gamma'.\alpha'}{\beta'.\alpha'},$$

τὰ τρία μήκη α, β, γ εἶναι ἀνάλογα τῶν β'γ', α'γ', α'β' ἢ καὶ τῶν

$$\beta',\ \alpha',\ \frac{\alpha'\beta'}{\gamma'}.$$

Εἶναι ἑπομένως τὸ ζητούμενον τρίγωνον (α, β, γ) ὅμοιον πρὸς τὸ ἔχον πλευρὰς τὰ γνωστὰ μήκη β', γ', $\frac{\alpha'\beta'}{\gamma'}$ κλπ.

Πρόβλημα 560

1618. Δίδεται γωνία ΧΟΥ καὶ σημεῖον Α ἐντὸς αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου τέμνουσα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΜΑΝ τοιαύτη, ὥστε τὸ τρίγωνον ΜΟΝ νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν δοθὲν k^2.

Διὰ τὸν ἀκριβῆ ὁρισμὸν τῆς θέσεως τοῦ σημείου Α, ἂς σχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΟΓ καὶ καλέσωμεν διὰ τῶν α, β τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του. Ἔστω υ ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΟΧ καὶ ΒΜ = x· εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ πρέπει νὰ ἀνεύρωμεν σχέσιν, συνδέουσαν τὸν ἀριθμὸν x, τὸν ὁρίζοντα τὴν θέσιν τῆς ΜΟΝ, πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

Σχ. 1048

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΜΟΝ, ΜΑΒ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν. Ἀφ' ἑτέρου, τὸ διπλά-

σιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΜΟΝ εἶναι ἴσον πρὸς $2k^2$ καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ ΜΒΑ ἴσον πρὸς $x \cdot υ$. Ἑπομένως:

$$\frac{2k^2}{xυ} = \frac{OM^2}{x^2} \quad ἢ \quad \frac{2k^2}{υ} = \frac{(α + x)^2}{x} \qquad (1)$$

ἢ

$$x\left[2\left(\frac{k^2}{υ} - α\right) - x\right] = α^2. \qquad (2)$$

Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον μὲ πλευρὰς x καὶ $2\left(\frac{k^2}{υ} - α\right) - x$ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $α^2$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του τὸ γνωστὸν μῆκος $2\left(\frac{k^2}{υ} - α\right)$.

Κατασκευή. Ἔστω λ ἡ τετάρτη ἀνάλογος $\frac{k^2}{υ}$ καὶ $ΟΛ = λ$. Θὰ εἶναι τότε $ΒΛ = \frac{k^2}{υ} - α$ καὶ ἂν λάβωμεν $ΛΔ = ΛΒ$ θὰ ἔχωμεν

$$ΒΔ = 2(λ - α) = 2\left(\frac{k^2}{υ} - α\right).$$

Γράφομεν ἀκολούθως τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΒΔ, λαμβάνομεν $ΒΕ = α$ καὶ φέρομεν τὴν παράλληλον ΕΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Τὰ μήκη $ΒΜ' = ΜΔ$ καὶ ΒΜ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Ὑπάρχουν, ἐν γένει, δύο λύσεις.

Ἐλάχιστον. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) φαίνεται ἀμέσως ὅτι τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ λύσιν ἐφ' ὅσον

$$\frac{k^2}{υ} > α \quad ἢ \quad k^2 = (ΑΟΜ) > αυ = (ΑΒΟΓ).$$

Τὸ ἐλάχιστον ἑπομένως ἐκ τῶν τριγώνων ΝΟΜ εἶναι τὸ ΡΑΣ', διπλάσιον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΟΓ.

Πρόβλημα 560—Ι

1619. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἀλλ' ὅπου τὸ ἓν ἐκ τῶν σημείων Μ ἢ Ν

Σχ. 1049.

νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως μιᾶς τῶν εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ.

Ἔστω $(ΜΟΝ) = k^2$, $ΒΜ = x$.

Θὰ εἶναι πάλιν

$$\frac{2(\text{MON})}{2(\text{MBA})}=\frac{2k^2}{\upsilon x}=\frac{\text{OM}^2}{x^2}=\frac{(x-\alpha)^2}{x^2}$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις (2) ἀνάγεται τώρα εἰς τὴν

$$x\left[2\left(\frac{k^2}{\upsilon}+\alpha\right)-x\right]=\alpha^2. \qquad (3)$$

Θὰ ὑπάρχουν δύο λύσεις καὶ τὸ k^2 δύναται νὰ ἔχῃ τυχοῦσαν τιμὴν μεταξὺ 0 καὶ $+\infty$.

Παρατήρησις. Διὰ $k^2>\alpha\upsilon$, τὸ πλῆρες πρόβλημα (§§ 1618, 1619) ἐπιδέχεται τέσσαρας λύσεις.

Πρόβλημα 560—II

1619 α. Διὰ σημείου Α ἐπὶ τῆς διχοτόμου δοθείσης γωνίας κειμένου, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΜΑΝ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων ΑΜ, ΑΝ νὰ εἶναι δοθὲν τετράγωνον.

(*Concours général des Collèges royaux de Paris*, 1819).

Τοῦ πολὺ ἐνδιαφέροντος τούτου προβλήματος, βλέπε λύσεις εἰς A. d. Gergonne, τομ. X (1819 — 1820), σ. 73 (Francœur) καὶ σ. 83 (Gergonne).

Πρόβλημα 560—III

1620. Εἰς δοθὲν ὀρθογώνιον, νὰ περιγραφῇ ῥόμβος δοθέντος ἐμβαδοῦ k^2.

Διὰ διαιρέσεως τοῦ ὀρθογωνίου εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, δι' εὐθειῶν ἐκ τοῦ κέντρου καὶ καθέτων ἐπὶ τὰς πλευράς, ἀναγόμεθα εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

Πρόβλημα 561

1621. Διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΜΟΔ τοῦ τριγώνου εἰς τρόπον, ὥστε

$$(\text{OBM})-(\text{O}\Gamma\Delta)=k^2,$$

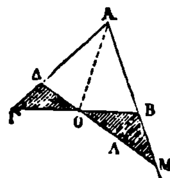
δοθὲν τετράγωνον.

Ἂν ΒΛ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, θὰ ἔχωμεν

$$(\text{OB}\Lambda)=(\text{O}\Gamma\Delta)$$

καὶ ἑπομένως

$$(\text{B}\Lambda\text{M})=k^2.$$



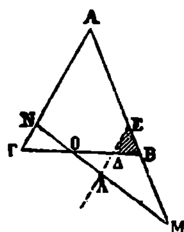
Σχ. 1050.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται οὕτω εἰς τὸ γνωστὸν ἑπόμενον:

Δίδονται γωνία ΛΒΜ *καὶ σημεῖον* Ο. *Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ τέμνουσα* ΟΛΜ *τοιαύτη, ὥστε*

$$(\Lambda\text{BM})=k^2. \qquad (\text{§ } 1618)$$

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα *καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ σημεῖον* Ο *εἶναι τυχὸν τῆς* ΒΓ.



Σχ. 1051.

Ἄς λάβωμεν ΟΔ = ΟΓ καὶ ἂς φέρωμεν τὴν ΕΔΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ. Θὰ εἶναι τότε

$$(ΛΔΒΜ) = k^2.$$

Ἔστω $α^2$ ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ γνωστοῦ τριγώνου ΒΔΕ· τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΛΕΜ θὰ εἶναι τότε

$$(ΛΕΜ) = k^2 + α^2$$

καὶ ἐπαναπίπτομεν εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 1618.

Πρόβλημα 561—I

1622. Διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς βάσεως ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτοῦ ΔΟΜ (σχ. 1050) εἰς τρόπον, ὥστε

$$\frac{(ΟΒΜ)}{(ΟΓΔ)} = \frac{μ}{ν}.$$

Ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν διὰ τοῦ Ο εὐθεῖαν ΟΛΜ τοιαύτην, ὥστε

$$\frac{ΟΜ}{ΟΛ} = \frac{μ}{ν}.$$

Πρόβλημα 561—II

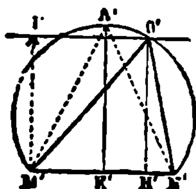
1623. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τῶν πλευρῶν δοθείσης ὀρθῆς γωνίας εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ὁριζόμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν καὶ δοθὲν ἐμβαδόν.

(*Μέθοδοι*, § 117).

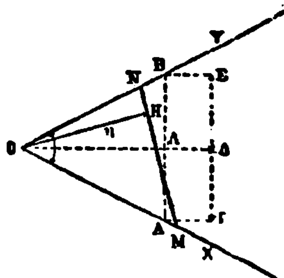
Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἐνταῦθα καὶ τὴν μέθοδον τοῦ ἀντιθέτου προβλήματος—ὡς εἰς τὸ ἑπόμενον γενικώτερον πρόβλημα.

Πρόβλημα 562

1624. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΜΝ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας ΧΟΥ



Σχ. 1052.



Σχ. 1053.

εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μῆκος ΜΝ νὰ εἶναι δοθὲν λ καὶ τὸ τρίγωνον ΜΟΝ ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.

Ἡ χρῆσις τῆς μεθόδου τοῦ *ἀντιθέτου προβλήματος* ὁδηγεῖ εἰς λύσιν ὀλίγον μὲν κομψὴν ἀλλὰ πολὺ ἁπλῆν.

1) Ἐπὶ τμήματος M'N' = λ γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν XOY (σχ. 1052) καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτοῦ σημεῖον O' εἰς ἀπόστασιν

$$υ = \frac{2k^2}{λ}$$

ἀπὸ τῆς χορδῆς M'N'. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ τοποθέτησις τοῦ τριγώνου M'O'N' ἐντὸς τῆς γωνίας XOY (Σχ. 1053) λύει τὸ πρόβλημα.

2) *Μέγιστον τοῦ k^2 διὰ ὡρισμένην τιμὴν τοῦ μήκους λ.*

Ἐπειδὴ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν τριγώνων M'O'N' εἶναι προφανῶς τὸ ἰσοσκελὲς M'Λ'N' μὲ ὕψος Λ'K', ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ k^2 εἶναι

$$k^2_{(max)} = \frac{λ \,.\, Λ'K'}{2}.$$

3) *Ἐλάχιστον τοῦ λ διὰ δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ k.*

Εἶναι ἡ βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ ἐμβαδὸν k^2.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα λύεται καὶ διὰ τῆς ἀλγεβρικῆς μεθόδου.

1624 α. Σημείωσις. 1) Τὸ πρόβλημα τοῦ Lez καὶ τοῦ Moret-Blanc: *Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τριγώνου σημεῖον, ἐξ οὗ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς διαιροῦν αὐτὸ εἰς τρία μέρη ἔχοντα ἐπιφανείας ἀναλόγους τριῶν μηκῶν* μ, ν, λ, λύεται διὰ τῶν τομῶν δύο ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν. (N. A., 1880, σ. 462. Βλ. ἐπίσης ἐπμ. § 1674).

2) Τὸ πρόβλημα τοῦ Bobillier (Cours de Géométrie) εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ προηγουμένου, ἀφοῦ εἰς αὐτὸ τὰ μήκη μ, ν, λ εἶναι ἴσα. Εἰς σχετικὴν σπουδὴν τοῦ Laser (N. A., 1884, σ. 332), ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου γεωμετρικὴ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι δυνατὴ διὰ τὸ ἰσοσκελὲς μόνον τρίγωνον.

3) Τὸ πρόβλημα ὅπερ προετάθη ὑπὸ τῶν Rouché καὶ Combe-rousse (*Traité de Géométrie* 7η ἔκδ., σ. 416, n° 453): *Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη διὰ δύο εὐθειῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας*, ὁδηγεῖ εἰς ἐξίσωσιν ὀγδόου βαθμοῦ καὶ ἐμελετήθη ὑπὸ τῶν Leibniz, Jacques Bernoulli καί, μετ' αὐτούς, ὑπὸ πολλῶν ἄλλων μαθηματικῶν. Βλ. σχετικῶς: *Int. d. Math.*, 1894. σ. σ. 39, 55.— 1809, σ. 33, Lemoine, E. de Jonquières, Gino - Loria.

Περισσοτέρας λεπτομερείας ἐπὶ τοῦ ἰδίου θέματος βλ. ἐπμ. § 1674, β, γ, δ.

Πρόβλημα 563

1625. **Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον O ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τοιοῦτον, ὥστε τὸ γινόμενον OM . ON τῶν ἐξ αὐτοῦ καθέτων ἐπὶ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν τιμὴν k^2.**

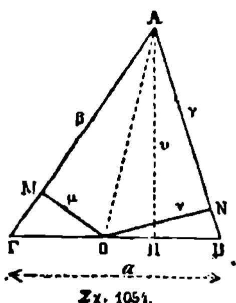
Ἔστω AH = υ τὸ ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ OM = μ, ON = ν. Ἐπειδή:

$$2E = αυ = βμ + γν \qquad (1)$$

καὶ

$$μν = k^2, \qquad (2)$$

δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ υ μεταξὺ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἐξίσωσιν πρὸς μ



Σχ. 1054.

$$\mu\left(\frac{\alpha\upsilon}{\beta}-\mu\right)=\frac{\gamma k^2}{\beta},$$

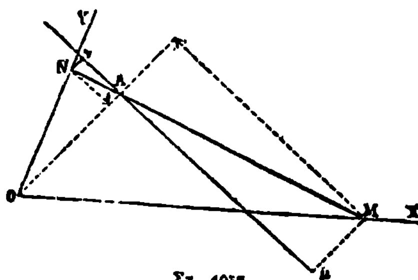
καὶ τῆς ὁποίας αἱ λύσεις εὐκόλως κατασκευάζονται.

Παρατήρησις. Τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου ΟΜ . ΟΝ ἀντιστοιχεῖ διὰ θέσιν τοῦ Ο συμπίπτουσαν πρὸς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ (Βλ. ἐπμ. § 1680).

Πρόβλημα 563—I

1626. **Διὰ σημείου Α εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γωνίας ΧΟΥ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτῆς ΜΑΝ τοιαύτη, ὥστε ἡ προβολή της μΑν ἐπὶ εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.**

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ μΑν = λ. Τὸ ἐμβα-



Σχ. 1055.

δὸν τοῦ τριγώνου ΜΟΝ θὰ εἶναι ὡρισμένον, ἀφοῦ τὸ διπλάσιόν του ἔχει ἐμβαδὸν

$$OA \cdot A\mu + OA \cdot A\nu = OA \cdot \lambda.$$

Εἶναι συνεπῶς :

$$(OMN)=\frac{OA \cdot \lambda}{2}=k^2,$$

καὶ ἀναγόμεθα εἰς προηγούμενον πρόβλημα (§ 1618).

Πρόβλημα τοῦ Timmermans 563—II

1626 α. **Εἰς τὸ ἐπίπεδον τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΔΕ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ τυχόντος σημείου αὐτῆς ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου νὰ εἶναι σταθερόν.**

Ἔστω ΑΒ ἡ μικροτέρα τῶν τριῶν πλευρῶν. Ἐὰν λάβωμεν ΑΔ = ΒΕ = ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Πράγματι, τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου ΔΑΒΕ δίδεται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος

$$AB \cdot MP + A\Delta \cdot M\Pi + BE \cdot M\Sigma,$$

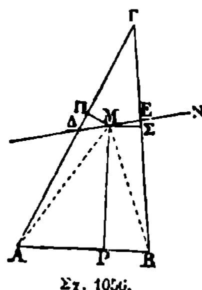
ἢ τοῦ γινομένου

$$AB\,(MP + M\Pi + M\Sigma).$$

Ἄρα:

$$MP + M\Pi + M\Sigma = \frac{2(\Delta ABE)}{AB} = \text{σταθερὰ ποσότης}.$$

Σημείωσις. 1) Ἐκ τῶν *Annales de Gergonne*, τομ. XVIII, 1827—1828, σ. 217. *Problèmes et Théorèmes sur les polygones et les Polyèdres*, ὑπὸ A. Timmermans.



Σχ. 1056.

2) Ἡ διερεύνησις τοῦ προβλήματος εἶναι ἐνδιαφέρουσα ἀλλὰ μακρά. Ὑπάρχουν ἓξ εὐθεῖαι, ἀνάλογοι πρὸς τὴν ΔΕ, διὰ τὰς τρεῖς ἀπεράτους εὐθείας, αἵτινες διέρχονται διὰ τῶν Α, Β, Γ. Θὰ πρέπει ἐπίσης νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ σημεῖα τῶν ἀποστάσεων ΜΡ, ΜΠ, ΜΣ· θὰ πρέπει, λ.χ., νὰ θεωρῶμεν τὴν ἀπόστασιν ΜΡ ὡς θετικήν, ἐὰν τὸ σημεῖον τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ὡς ἀρνητικὴν ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ ἕτερον ἡμιεπίπεδον.

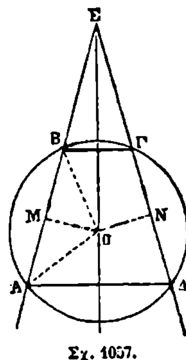
Τὰ σημεῖα π. χ. τῆς προεκτάσεως ΕΝ ἔχουν θετικὰς ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἀρνητικὴν ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. (Βλ. ἐπίσης § 1898 α).

Πρόβλημα 564

1627. **Διὰ τῆς κορυφῆς Μ παραλληλογράμμου ΑΜΡΠ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΒΜΓ δύο προσκειμένων πλευρῶν αὐτοῦ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ὁριζόμενον τρίγωνον ΒΑΓ νὰ ἔχῃ τὸ ἐλάχιστον ἐμβαδόν.**

(*Μέθοδοι*, § 351 α).

Πρόβλημα 564—I



Σχ. 1057.

1628. **Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς διχοτόμου δοθείσης γωνίας Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγώνων, τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο καὶ βάσεις τὰς ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ὁριζομένας χορδὰς τῆς περιφερείας νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.**

Ἐπειδὴ $(AOB) = (\Gamma O\Delta) = \frac{k^2}{2}$, ἕπεται

$$AB = \Gamma\Delta = \frac{k^2}{2\upsilon}.$$

ὅπου $υ = OM = ON =$ αἱ ἀποστάσεις τοῦ O ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. Εἶναι ἄρα τὰ τρίγωνα OMB, ONΓ κατασκευάσιμα.

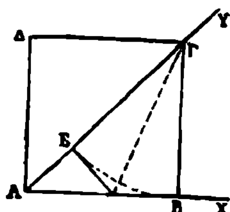
Πρόβλημα 565

1629. 1) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος λ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου.

(Κατασκευὴ ἄμεσος εἰς *Μεθόδους*, § 41).
(Κατασκευὴ διὰ τῶν ὁμοίων σχημάτων εἰς *Μεθόδους*, 207).

2) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τῆς διαφορᾶς δ τῆς πλευρᾶς ἀπὸ τῆς διαγωνίου.

Δυνάμεθα νὰ καταφύγωμεν πάλιν εἰς τὰ ὅμοια σχήματα (*Μέθοδοι*, § 207), ἤ, δι' ἀναλύσεως ἀναλόγου ἐκείνης τοῦ πρώτου προβλήματος (*Μέθοδοι*, § 41), νὰ ὁδηγηθῶμεν εἰς μίαν ἀπ' εὐθείας κατασκευήν.



Σχ. 1068.

Ἡ ἑπομένη λύσις εἶναι ἁπλῆ καὶ κομψή.

Ἐπὶ εὐθείας AY κεκλιμένης πρὸς ἄλλην AX κατὰ 45°, λαμβάνομεν τμῆμα AE = δ καὶ μὲ κέντρον E καὶ ἀκτῖνα δ γράφομεν περιφέρειαν.

Ἔστω Z ἡ δευτέρα τομὴ τῆς AX καὶ τῆς περιφερείας ταύτης καὶ ZB = δ. Ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι ἡ AB.

Πράγματι, τὸ τρίγωνον AEZ εἶναι ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον, ἡ EZ κάθετος ἐπὶ τὴν AΓ καὶ τὸ τετράπλευρον EZBΓ δισορθογώνιον· ἐπειδὴ δὲ ZB = ZE θὰ εἶναι καὶ BΓ = EΓ καὶ συνεπῶς

$$A\Gamma - B\Gamma = AE = \delta.$$

Πρόβλημα 565—I

1630. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ α καὶ ἡ διαγώνιος β τετραγώνου, συναρτήσει τοῦ ἀθροίσματος λ ἢ τῆς διαφορᾶς δ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

1) Γνωρίζομεν ὅτι $\beta = \alpha\sqrt{2}$ · ἄρα

$$\alpha + \alpha\sqrt{2} = \lambda \quad \text{καὶ} \quad \alpha = \frac{\lambda}{1+\sqrt{2}}.$$

Ἐπίσης $$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \quad \text{ἄρα}$$

$$\beta + \frac{\beta}{\sqrt{2}} = \lambda, \quad \beta = \frac{\lambda\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

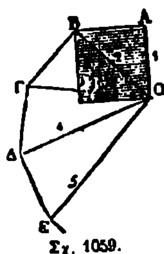
2) $$\alpha\sqrt{2} - \alpha = \delta = \beta - \frac{\beta}{\sqrt{2}}. \quad \text{Ἑπομένως,}$$

$$\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{2}-1}, \quad \beta = \frac{\delta\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

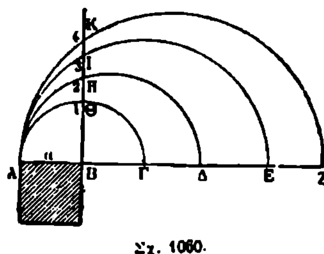
Πρόβλημα 566

1631. Νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα παρέχον τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων, τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ. δοθέντος τετραγώνου.

1) Ἔστω ΟΑ = α ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Ἡ διαγώνιος ΟΒ αὐτοῦ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου τετραγώνου. Ἐὰν δὲ κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΒΓ, λαμβά-



Σχ. 1059.



Σχ. 1060.

νοντες ΒΓ = α, ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΟΓ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου κλπ.

2) Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ λαμβάνομεν τμήματα συνεχῆ ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΕΖ καὶ γράφομεν τὰς περιφερείας μὲ διαμέτρους ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ κλπ. Θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ σχήματος

$$\text{Β}\Theta^2 = \alpha^2,$$

$$\text{ΒΗ}^2 = 2\alpha^2,$$

$$\text{ΒΙ}^2 = 3\alpha^2 \quad \text{κλπ.}$$

Πρόβλημα 566—I

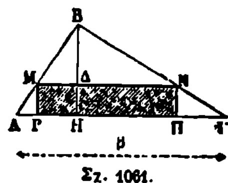
1632. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ΡΜΝΠ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΜΝ.

Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{ΜΝ}.\text{ΒΔ}}{2} = \text{ΜΝ}.\text{ΜΡ}.$$

Ἄρα:

$$\text{ΜΡ} = \frac{\text{ΒΔ}}{2}.$$



Σχ. 1061.

Θὰ εἶναι δηλ. τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΜΒΝ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ΒΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἢ

$$\text{ΒΔ} = \frac{2}{3}\text{ΒΗ} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΜΡ} = \frac{1}{3}\text{ΒΗ}.$$

Πρόβλημα 566—II

1633. Ἀνάλογον πρόβλημα: Τὸ τρίγωνον ΒΜΝ νὰ ἔχῃ λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΡΜΝΠ.

Εὑρίσκομεν $$Β\Delta = \frac{2\mu\upsilon}{2\mu+\nu},$$
ὅπου $\upsilon = ΒΗ$.

Πρόβλημα 567

1634. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τρίγωνον τετράγωνον. Ποῖον τὸ μέγιστον ἐκ τῶν τριῶν τετραγώνων ἅτινα κατασκευάζονται;

Ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ὁμοίων σχημάτων ὁδηγούμεθα ἀμέσως εἰς τὴν ἑπομένην κατασκευήν:

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον ΑΓΚΕ, φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΡΕ, ΒΠΚ καὶ ὑψοῦμεν καθέτους ΡΜ, ΠΝ ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Σχ. 1062.

1635. *Διερεύνησις.* Κατὰ τὴν ἀνωτέρω κατασκευήν, ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου δύναται νὰ στηρίζηται ἀνὰ ἓν ἐκ τῶν ζητουμένων τετραγώνων. Ἄς ἐκφράσωμεν τὴν πλευρὰν ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων συναρτήσει τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους.

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ πλευραί, α', β', γ' τὰ ἐπ' αὐτῶν ὕψη καὶ x, y, z αἱ πλευραὶ τῶν ἀντιστοίχων τετραγώνων.

Θὰ ἔχωμεν
$$\frac{ΜΡ}{ΑΕ} = \frac{ΒΡ}{ΒΕ} = \frac{ΒΗ}{ΒΖ},$$
ἢ
$$\frac{y}{\beta} = \frac{\beta'}{\beta'+\beta}, \quad y = \frac{\beta\beta'}{\beta+\beta'},$$
καὶ ἀναλόγως
$$x = \frac{\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}, \quad z = \frac{\gamma\gamma'}{\gamma+\gamma'}.$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι πάντες ἴσοι, ὡς ἐκφράζοντες τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς τὸν μικρότερον παρονομαστὴν θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ πλευρὰ τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου.

Ἔστω $\alpha > \beta$· ἐκ τῆς σχέσεως $\alpha\alpha' = \beta\beta'$ ἢ τῆς
$$\frac{\alpha}{\beta'} = \frac{\beta}{\alpha'},$$
ἕπεται ἡ
$$\frac{\alpha-\beta'}{\alpha} = \frac{\beta-\alpha'}{\beta}.$$

Ἐπειδὴ $\alpha > \beta$, θὰ συμβαίνῃ κατ' ἀνάγκην

$$\alpha - \beta' > \beta - \alpha'$$

δηλ.

$$\alpha + \alpha' > \beta + \beta',$$

καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ εἶναι

$$y > x.$$

Ὥστε: *Τὸ μεγαλύτερον τετράγωνον εἶναι τὸ στηριζόμενον ἐπὶ τῆς μικροτέρας πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.*

Θεώρημα 567—I

1636. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν πλευρῶν τῶν τριῶν τετραγώνων τοῦ προηγουμένου προβλήματος, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν καὶ ὑψῶν τοῦ τριγώνου διαιρεθὲν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

Ἐπειδὴ

$$\frac{1}{x} = \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha\alpha'} = \frac{\alpha + \alpha'}{2E}, \quad \frac{1}{y} = \frac{\beta + \beta'}{2E}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\gamma + \gamma'}{2E}$$

καὶ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma'}{2E}.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$ καὶ $\alpha' + \beta' + \gamma' = 2\tau'$, λαμβάνομεν

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{\tau + \tau'}{E}.$$

Πρόβλημα 568

1637. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον δοθείσης περιμέτρου καὶ ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ἄλλο ὀρθογώνιον.

Ἔστω 2τ ἡ περίμετρος, μ, ν αἱ διαστάσεις τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν γραφικὴν κατασκευὴν τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$x(\tau - x) = \mu\nu \qquad (\S\ 297)$$

Πρόβλημα 568—I

1638. Τὸ αὐτὸ ζήτημα, ἀλλ' ὅπου ἀντὶ τῆς περιμέτρου δίδεται ἡ διαφορὰ δ δύο ἐφεξῆς πλευρῶν.

Ἀναγόμεθα πάλιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$x(x - \delta) = \mu\nu. \qquad (\S\ 299)$$

Πρόβλημα 569

1639. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον ὀρθογώνιον δοθέντος ἐμβαδοῦ.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 100 δ.).

Ἄλλη λύσις. Τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον ΑΔΒΓ ἀποτελεῖται ἐκ δύο ὀρθογωνίων, ἐχόντων μίαν διάμετρον ΑΒ ὡς κοινὴν πλευράν.

Ἔστω υ τὸ ὕψος ἑνὸς ἐκ τῶν τριγώνων τούτων ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ $4\alpha^2$ ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια.

Θὰ ἔχωμεν

$$2(ΑΒΓ) = ΑΒ\,.\,υ = 4α^2$$

καὶ

$$υ = \frac{4α^2}{ΑΒ}$$

Σχ. 1063.

Ἐὰν λάβωμεν ΒΕ = 2α, ΒΗ = α (ΒΗΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ) καὶ γράψωμεν ἡμιπεριφέρειαν ΑΒΖ, διερχομένην διὰ τοῦ Ε, ἐκ τοῦ σχήματος λαμβάνομεν

$$ΒΖ = \frac{ΒΕ^2}{ΑΒ} = \frac{4α^2}{ΑΒ},$$

καὶ ἡ ἐκ τοῦ Η παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒΖ τέμνει τὴν περιφέρειαν κατὰ τὴν κορυφὴν Γ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Πρόβλημα 569—I

1640. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον ὀρθογώνιον δοθέντος ἐμβαδοῦ $2k^2$, (§ 100 δ).

Πρόβλημα 570

1641. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τρίγωνον ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.

(*Γεωμετρικὴ Μέθοδος*, § 202.— *Ἀλγεβρικὴ Μέθοδος*, § 303 α (δ).

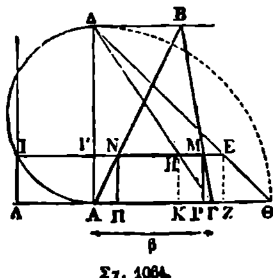
Πρόβλημα 571

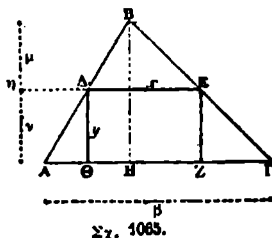
1642. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τρίγωνον τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον.

1) Δυνάμεθα νὰ σπουδάσωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν περίπτωσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ νὰ ὁδηγηθῶμεν οὕτω εἰς τὴν γενικὴν λύσιν (*Μέθοδοι*, § 349).

2) Τὸ τρίγωνον εἶναι τυχὸν (*Μέθοδοι*, § 352).

3) Τὸ ζητούμενον μέγιστον δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς ἡ ὁριακὴ λύσις ἑνὸς προβλήματος μελετηθέντος ἤδη (§ 202). Τὸ μέ-


Σχ. 1064.


Σχ. 1065.

γιστον λαμβάνεται ὅταν ἡ παράλληλος ΛΙ ἐφάπτεται τῆς ἡμιπεριφερείας (Σχ. 1064).

Ἡ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν ΒΑ καὶ ΒΓ.

4) Τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον εὑρίσκεται καὶ διὰ τοῦ ἑπομένου, ἀμέσου καὶ πολὺ κομψοῦ, τρόπου (Σχ. 1065).

Ἔστωσαν x, y ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου, μ καὶ ν τὰ μήκη τῶν τμημάτων εἰς ἃ χωρίζει τὸ ὕψος ΒΗ ἡ ἄνω πλευρὰ ΔΕ τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἐκφράζοντες τὰ x, y συναρτήσει τῶν δεδομένων καὶ τῶν μ, ν, εὑρίσκομεν

$$\frac{\Delta E}{A\Gamma}=\frac{x}{\beta}=\frac{\mu}{\mu+\nu}, \quad \frac{\Delta\Theta}{BH}=\frac{y}{\upsilon}=\frac{\nu}{\mu+\nu}. \qquad (1)$$

Ἑπομένως

$$(\Delta EZ\Theta)=xy=\beta\upsilon\cdot\frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2}=\frac{\beta\upsilon\,\mu\nu}{\upsilon^2}=\frac{\beta}{\upsilon}\,\mu\nu. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ $\mu+\nu=\upsilon=$ σταθ., τὸ γινόμενον $\mu\nu$ καθίσταται μέγιστον διὰ $\mu=\nu$, κατὰ συνέπειαν τοῦ μεγίστου ἐγγεγραμμένου ὀρθογωνίου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ — καὶ τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ — ἡ ἄνω βάσις διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν ΒΑ καὶ ΒΓ τοῦ τριγώνου.

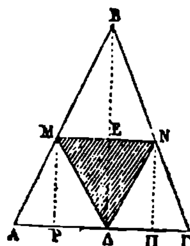
Παρατήρησις. Τὰ τρία ἐγγεγραμμένα εἰς τὸ τρίγωνον μέγιστα ὀρθογώνια — μὲ βάσεις ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἀντιστοίχως — εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐπειδὴ ἕκαστον τούτων ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

Πρόβλημα 571—I

1643. Διὰ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΒΔ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι ΔΜ, ΔΝ, ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὸ ὕψος καὶ τοιαῦται, ὥστε τὸ τρίγωνον ΜΔΝ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΜΔΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΕΝΠ, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον (§ 1642).

Τὸ μέγιστον τῶν τριγώνων τούτων λαμβάνεται διὰ Μ, Ν συμπίπτοντα πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΒΓ (§ 352).



Σχ. 1066.

Πρόβλημα 571—II

1644. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΜΝ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΑΓ τριγώνου τυχόντος ΑΒΓ (Σχ. 1066) καὶ τοιαύτη, ὥστε ἂν Δ τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΓ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΜΔΝ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.

Τὸ τρίγωνον ΜΔΝ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον καὶ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ δοθὲν τετράγωνον.

Πρόβλημα 571—III

1645. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ῥόμβον ὀρθογώνιον δοθείσης ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ ῥόμβου. Ποῖον τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τούτων;

Θεωροῦντες τὸ τέταρτον τοῦ σχήματος, ἀναγόμεθα εἰς προηγούμενα προβλήματα (§§ 1641, 1642).

Τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον εἶναι τὸ μὲ κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ρόμβου καὶ ἡ ἐπιφάνειά του ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ ἐκείνης τοῦ ρόμβου.

Πρόβλημα 571—IV

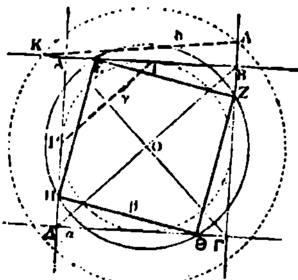
1646. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τετράγωνον ἄλλο δοθείσης ἐπιφανείας. Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα.**

Ἔστω α ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ β ἡ τοῦ ζητουμένου.

Μὲ κέντρον τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα $\frac{\beta}{\sqrt{2}}$ γράφομεν περιφέρειαν, τέμνουσαν εἰς Ε, Ζ, Θ, Η τὰ πλευρὰς τοῦ τετραγώνου (§ 1015, 1)). Θὰ ἔχωμεν

$$EZ^2 = OE^2 + OZ^2 = \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} = \beta^2.$$

Τὸ ἐλάχιστον τετράγωνον εἶναι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῶν πλευρῶν τοῦ ἀρχικοῦ τετραγώνου· ἡ ἐπιφάνειά τοῦ εἶναι $\text{II}'^2 = \frac{\alpha^2}{2}$. Τοῦτο δὲ εἶναι τὸ μὲ κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τεραγώνου



Σχ. 1067.

Τὸ β δύναται νὰ ἔχῃ πᾶσαν τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς $\text{II}' = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$. Διὰ $\beta > \alpha$ λ. χ., αἱ κορυφαὶ τοῦ τετραγώνου εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν τοῦ ἀρχικοῦ (ὡς αἱ Κ, Λ).

Διὰ τιμὰς του $\beta > \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, ὑπάρχουν δύο λύσεις τοῦ προβλήματος.

Παρατήρησις. Ἡ κατασκευὴ τοῦ W. Collins (§ 1015, 2)), ὁδηγεῖ εἰς τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα.

Θεώρημα 571—V

1646 α. **Τὸ ἐλάχιστον ἐκ τῶν ἐγγραφομένων πολυγώνων εἰς τυχὸν κανονικὸν πολύγωνον, εἶναι τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου.**

Οἱαδήποτε πράγματι καὶ ἂν εἶναι ἡ γωνία Α τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου Π — τοῦ ὁποίου ἔστω ν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν — τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον Π', τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Θ κλπ., πέρατα τῶν ἴσων τμημάτων ΑΕ = ΒΖ = ΓΘ κλπ., ἔχει ἐπιφάνειαν ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς ἐπιφανείας τοῦ δοθέντος καν. πολυγώνου ἀπὸ τὸ ν - πλάσιον τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς τυχόντος ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΗΑΕ, ΕΒΖ κλπ.

$$(\Pi') = (\Pi) - \nu . (HAE). \qquad (\alpha)$$

Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΗΑΕ καὶ ΙΑΙ′ ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν Α· εἶναι ἑπομένως πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς ἴσας γωνίας, ἢ

$$\frac{(\mathrm{HAE})}{(\mathrm{MI'I})} = \frac{\mathrm{AH}.\mathrm{AE}}{\mathrm{AI'}.\mathrm{AI}}.$$

Ἑπομένως:

$$(\mathrm{HAE}) = \frac{(\mathrm{I'AI})}{\mathrm{AI'}.\mathrm{AI}}.\mathrm{AH}.\mathrm{AE} = (\sigma\tau\alpha\theta.).\mathrm{AH}.\mathrm{AE}.,$$

καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{AH} + \mathrm{AE} = \mathrm{AI'} + \mathrm{AI} = \alpha =$ σταθερὸν μῆκος, τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ΗΑΕ λαμβάνεται διὰ

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AE} = \mathrm{AI'} = \mathrm{AI} = \frac{\alpha}{2},$$

ὅπου α ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου.

Κατὰ συνέπειαν, τὸ μέγιστον πολύγωνον Π′ εἶναι ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου Π.

Πρόβλημα 572

***1647.* Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο προσκειμένων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι δοθὲν τετράγωνον.**

Εἶναι προτιμότερον νὰ καταφύγωμεν εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν μέθοδον (§ 304, ζ)· ἐπειδὴ ἡ χρῆσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων ἀπαιτεῖ τὴν κατασκευὴν τοῦ τόπου τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ὀρθογωνίων εὐθειῶν εἶναι σταθερά· εἶναι δὲ ὁ τόπος οὗτος *ἰσοσκελὴς ὑπερβολή*, ἔχουσα τοὺς ἄξονάς της ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν αὐτῶν.

Θὰ ἠδυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἀναχθῶμεν εἰς τὸ γνωστὸν πρόβλημα: *Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τομῆς εὐθείας καὶ ὑπερβολῆς χωρὶς τὴν κατασκευὴν τῆς καμπύλης ταύτης.*

Πρόβλημα 572—I

***1647 α.* Νὰ εὑρεθῇ ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου, θεωροῦντες αὐτὸ ὡς τὴν διαφορὰν δύο τριγώνων.**

Ἔστωσαν β, β′ καὶ υ, υ′ αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη τῶν δύο τριγώνων, ἅτινα σχηματίζονται διὰ προεκτάσεως τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου καὶ μέχρι τῆς τομῆς των. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\upsilon}{\upsilon'} = \frac{\beta}{\beta'}, \quad \upsilon - \upsilon' = \Upsilon = \text{ὕψος τοῦ τραπεζίου.}$$

καὶ

$$\text{Ἐμβ. τραπεζίου} = \frac{\beta\upsilon - \beta\upsilon'}{2}.$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν δύο ὑψῶν υ, υ′ μεταξὺ τῶν τριῶν ἀνωτέρω σχέσεων εὑρίσκομεν

$$\text{Ἐμβ. τραπεζίου} = \frac{\beta + \beta'}{2}.\Upsilon.$$

1648. Δίδονται δύο παράλληλοι ΧΧ', ΥΥ' καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β Ζητεῖται νὰ ἀχθοῦν διὰ τῶν σημείων τούτων δύο παράλληλοι ΑΘΗ, ΙΒΚ (Σχ. 1068) τοιαῦται, ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΘΗΙΚ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.

Σχ. 1068.

Ἔστω β ἡ βάσις τοῦ παραλληλογράμμου καὶ υ ἡ ἀπόστασις τῶν δοθεισῶν παραλλήλων. Θὰ ἔχωμεν

$$\beta\upsilon = k^2, \quad \text{ἄρα } \beta = \frac{k^2}{\upsilon},$$

μῆκος εὐκόλως κατασκευάσιμον.

Διὰ τοῦ Β φέρομεν παράλληλον zz' πρὸς τὰς ΧΧ', ΥΥ', λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμήματα ΒΔ = ΒΕ = β καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔΗ, ΑΕΖ.

Τὸ παραλληλόγραμμον ΘΗΙΚ ὁρίζεται διὰ τῆς μιᾶς τῶν εὐθειῶν τούτων, τῆς ΑΔΗ. Ἡ ἄλλη εὐθεῖα δίδει μίαν δευτέραν λύσιν.

Παρατήρησις. Τὸ ἐμβαδὸν k^2 δύναται νὰ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$.

Πρόβλημα 573

1649. Ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν γωνίας Ο δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ζητεῖται ὅπως ἀχθοῦν διὰ τῶν σημείων αὐτῶν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τοιαῦται, ὥστε τὸ ὑπ' αὐτῶν καὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ὁριζόμενον τραπέζιον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.

Σχ. 1069.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 1566, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς τοῦ μέσου τῆς ἄλλης:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΗΘ} = k^2.$$

Ἄρα

$$\text{ΗΘ} = \frac{k^2}{\text{ΑΒ}}, \text{ μῆκος ὁριζόμενον } \lambda.$$

Διὰ τὴν κατασκευήν, ὑψοῦμεν κάθετον ΕΖ = λ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΟΑΒ τῆς γωνίας Ο καὶ ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν παράλληλον ΖΘ πρὸς τὴν πλευρὰν ταύτην. Ὁρίζεται οὕτω τὸ μέσον Θ τῆς ἀγνώστου πλευρᾶς ΓΔ τοῦ ζητουμένου τραπεζίου.

Αἱ ἐκ τῶν Α καὶ Β παράλληλοι πρὸς τὴν συνδέουσαν τὸ Θ μετὰ τοῦ μέσου Λ τῆς ΑΒ εὐθεῖαν, τερματίζουν τὴν κατασκευήν.

1649 α. *Παρατήρησις*. Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὰ ἀκόλουθα ἀνάλογα πρὸς τὸ ἀνωτέρω προβλήματα:

Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ *ἐκ δύο κορυφῶν* Α, Β *ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας* Ο *καὶ*

1) *Ἐκ τοῦ ὕψους* ΒΜ *τοῦ τραπεζίου.*

Τὸ σχῆμα δεικνύει τὴν κατασκευήν.

2) *Ἐκ τοῦ μήκους λ τῆς ἀπέναντι τῆς ΑΒ πλευρᾶς ΓΔ τοῦ τραπεζίου.* Ἐπειδὴ

$$\frac{ΟΓ}{ΟΒ}=\frac{ΓΔ=λ}{ΑΒ},$$

ἡ θέσις τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τῆς ΟΧ ἀπέχει τοῦ Ο κατὰ τὸ μῆκος

$$ΟΓ=\frac{λ.ΟΒ}{ΑΒ}.$$

Πρόβλημα 574

1650. Διὰ δύο σημείων Α, Β ἐπὶ μιᾶς περιφερείας (Ο) νὰ ἀχθοῦν δύο παράλληλοι χορδαὶ αὐτῆς ΑΔ, ΒΓ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.

Ἐπειδὴ καὶ πάλιν

$$(ΑΒΓΔ)=ΑΒ.ΝΗ=k^2$$

καὶ

$$ΝΗ=\frac{k^2}{ΑΒ}=\text{μῆκος κατ)μον},$$

ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ Μ ἐπὶ τὴν ΑΒ τμῆμα ΜΛ=ΝΗ καὶ ἐκ τοῦ Λ νὰ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Ἡ τομὴ τῆς παραλλήλου αὐτῆς καὶ τῆς περιφερείας (Ο, ΟΜ), ὁρίζει τὸ μέσον Ν τῆς πλευρᾶς ΓΔ, ἡ δὲ εἰς τὸ Ν ἐφαπτομένη τῆς γραφείσης περιφερείας τέμνει τὴν δοθεῖσαν κατὰ τὰς κορυφὰς Γ καὶ Δ τοῦ ζητουμένου τραπεζίου.

Σχ. 1070.

Διερεύνησις. 1) Ὑπάρχουν δύο ἐν γένει λύσεις, ἀφοῦ ἡ εὐθεῖα ΛΝ τέμνει τὴν περιφέρειαν ΟΜ κατὰ δύο, ἐν γένει, σημεῖα.

2) Τὸ μέγιστον τραπέζιον λαμβάνεται διὰ

$$ΜΛ=2ΜΟ=\frac{k^2}{ΑΒ},$$

δηλ. διὰ $k^2=2.ΜΟ.ΑΒ.$

3) Τὸ τραπέζιον ἀποβαίνει τρίγωνον ΑΒΚ ὅταν ἡ ΝΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΙΙ′ τοῦ σχήματος· θὰ εἶναι τότε

$$k^2=ΑΒ.ΙΙ'.$$

4) Διὰ τιμὰς τοῦ $k^2<ΑΒ.ΙΙ'$, ἡ χορδὴ ΑΒ παύει ἀπὸ τοῦ νὰ εἶναι μία τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τραπεζίου καὶ γίνεται μία τῶν διαγωνίων αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ἡ κορυφὴ Γ θὰ εὑρίσκεται τότε μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β.

Πρόβλημα 575

1651. 1) Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο, νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα δύο παραλλήλους εὐθείας (Σχ. 1070) εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρα-

πέζιον ΑΒΓΔ μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα τομῆς νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον, εὑρίσκομεν

$$MN \, . \, Z\Theta = k^2, \quad MN = \frac{k^2}{\Theta Z} \, .$$

Ἐπειδὴ τὸ ὕψος ΘΖ τοῦ τραπεζίου εἶναι γνωστὸν μῆκος, τὸ μῆκος ΜΝ εἶναι κατασκευάσιμον, ὡς ἐπίσης καὶ τὸ $EM = \frac{k^2}{2 . Z\Theta}$.

Κατασκευή. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΜ, ὑψοῦμεν εἰς τὸ Μ κάθετον ΑΒ ἐπὶ τὴν ΟΜ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ.

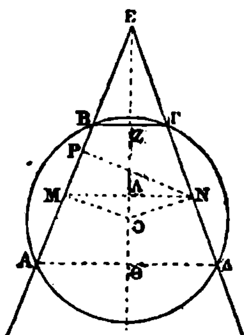
2) Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ, τέμνουσα δύο παραλλήλους εὐθείας εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον τραπέζιον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2 (Σχ. 1070).

Εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Θ τῆς μιᾶς τῶν παραλλήλων φέρομεν κάθετον ἐπ' αὐτὰς ΘΕΖ καὶ τὴν ἴσον ἀπέχουσαν αὐτῶν παράλληλον· ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς παραλλήλου ταύτης μήκη

$$EM = EN = \frac{k^2}{2 . \Theta Z},$$

πᾶν τραπέζιον, τοῦ ὁποίου αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ διέρχονται διὰ τῶν Μ καὶ Ν θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς k^2.

Καὶ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται *εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνου ὀρθογωνίου* ΑΜΟ, ἐκ τοῦ μήκους ρ τῆς ὑποτεινούσης, τῆς θέσεως Μ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἐκ τῆς συνθήκης, ὅπως αἱ δύο ἄλλαι κορυφαί του νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ δοθεισῶν εὐθειῶν ΑΖ καὶ ΘΖ (§ 975).



Σχ. 1071.

Πρόβλημα 576

1652. Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς διχοτόμου γωνίας Ε, νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ὁριζόμενον τραπέζιον νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν δοθὲν k^2.

Ἐκ τοῦ κέντρου φέρομεν τὰς καθέτους ΟΜ, ΟΝ, ὡς καὶ τὴν ΝΡ. Ἡ ΜΝ θὰ εἶναι ἡ μέση βάσις τοῦ τραπεζίου.

1) Ἐπειδὴ $MN \, . \, Z\Theta = k^2$

καὶ $$Z\Theta = \frac{k^2}{MN},$$

τὸ ὕψος ΖΘ τοῦ τραπεζίου κατασκευάζεται, τὰ σημεῖα Ζ καὶ Θ (ΛΖ = ΛΘ) εὑρίσκονται κλπ.

2) Ἐπειδὴ $AB \, . \, NP = k^2$ (§ 1566), τὸ μῆκος ΑΒ κατασκευάζεται καὶ ὁρίζονται τὰ σημεῖα Α καὶ Β (ΜΑ = ΑΒ). Ἡ κατασκευὴ αὕτη εἶναι προτιμοτέρα τῆς προηγουμένης.

Πρόβλημα 576—I

1653. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας καὶ τοιαύτη, ὥστε αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας νὰ ὁρίζουν, μετὰ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, τραπέζιον δοθείσης ἐπιφανείας k^2.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ

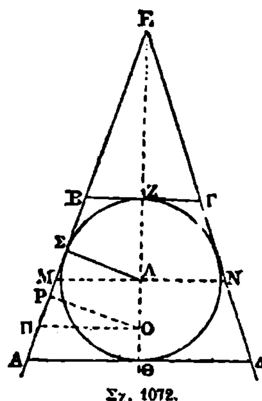
$$ΜΝ \,.\, ΖΘ \quad ἢ \quad 4ΛΜ \,.\, ΛΣ = k^2.$$

Ἐὰν φέρωμεν τὰς ΟΡ, ΟΠ, καθέτους ἐπὶ τὰς ΕΑ καὶ ΕΘ ἀντιστοίχως, ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΛΣΜ καὶ ΟΡΠ λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{ΛΣ}{ΟΡ} = \frac{ΛΜ}{ΟΠ}$$

ἢ
$$\frac{ΛΣ^2}{ΟΡ^2} = \frac{ΛΜ \,.\, ΛΣ}{ΟΡ \,.\, ΟΠ} = \frac{k^2}{4 \,.\, ΟΡ \,.\, ΟΠ},$$

ἐξ ἧς ἕπεται ἡ κατασκευὴ τῆς ἀκτῖνος ΛΣ τῆς ζητουμένης περιφερείας.



Σχ. 1072.

Πρόβλημα 576—II

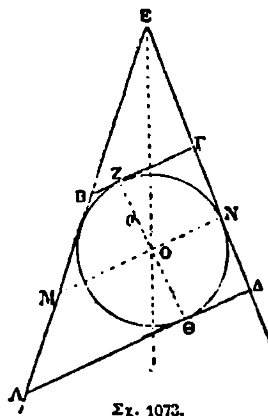
1653 α. Δίδεται περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας Ε καὶ ζητεῖται ὅπως ἀχθοῦν δύο ἄλλαι ἐφαπτόμεναι παράλληλοι καὶ τοιαῦται, ὥστε τὸ ὑπ' αὐτῶν καὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ὁριζόμενον τραπέζιον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.

Ἔστω λελυμένον τὸ πρόβλημα, ΜΝ ἡ μέση βάσις τοῦ τραπεζίου καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας. Ἐπειδὴ

$$2ρ \,.\, ΝΜ = k^2,$$

$$ΜΝ = \frac{k^2}{2ρ} = μῆκος\ κατ)μον,$$

ἀναγόμεθα εἰς τὸ *πρόβλημα τοῦ Πάππου:* Διὰ σημείου Ο ἐπὶ τῆς διχοτόμου γωνίας Ε, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΜΟΝ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ὡρισμένου μήκους (§§ 309 α καὶ 321 α).



Σχ. 1073.

Πρόβλημα 577

1654. Νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα (Γ) ὅμοιον δοθέντος ἄλλου (Α) καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τρίτον (Β).

Ἔστωσαν μ καὶ x δύο ὁμόλογα εὐθύγραμμα τμήματα τῶν σχημάτων (Α) καὶ (Γ).

Τὰ σχήματα (Α) καὶ (Β) δύνανται νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς

τὰ ἰσοδύναμα πρὸς αὐτὰ τετράγωνα $α^2$ καὶ $β^2$. Τὰ σχήματα ἑπομένως (Α) καὶ (Γ) θὰ ἔχουν ἐμβαδὰ $α^2$ καὶ $β^2$ καὶ μήκη ὁμόλογα μ καὶ x, ἀντιστοίχως.

Ἄρα:

$$\frac{α^2}{β^2} = \frac{(Α)}{(Γ)} = \frac{μ^2}{x^2} \quad \text{καὶ} \quad x = \frac{βμ}{α} = \text{κατ)μον μῆκος } γ.$$

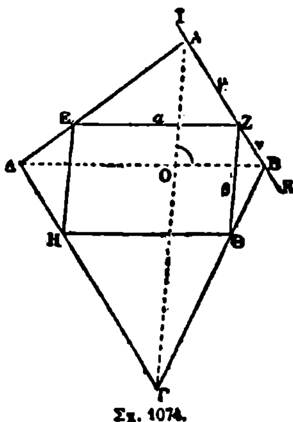
Εἶναι λοιπὸν γνωστὸν τὸ ὁμόλογον τοῦ μ μῆκος x τοῦ ζητουμένου σχήματος καὶ τοῦτο κατασκευάσιμον.

Πρόβλημα 577—Ι

1654 α. **Δοθέντος τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, διαιροῦμεν τὰς πλευράς του διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ κατὰ τοὺς λόγους**

$$\frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΔ} = \frac{ΓΗ}{ΗΔ} = \frac{ΓΘ}{ΘΒ} = \frac{μ}{ν}.$$

Ποῖος ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ οὕτω λαμβανομένου παραλληλογράμμου ΕΖΘΗ πρὸς τὸ τοῦ ἀρχικοῦ τετραπλεύρου;



Σχ. 1074.

Ἔστωσαν α, β αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ γ = ΔΒ, δ = ΑΓ. Ἐπειδὴ

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2} γδ \, ημ \widehat{Ο},$$

$$(ΕΖΘΗ) = αβ \, ημ \widehat{Ο},$$

ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι

$$λ = \frac{2.αβ}{γδ}.$$

Πρὸς ὁρισμὸν αὐτοῦ, παρατηροῦμεν ὅτι

$$\frac{α}{γ} = \frac{μ}{μ+ν}, \quad α = \frac{γμ}{μ+ν},$$

$$\frac{β}{δ} = \frac{ν}{μ+ν}, \quad β = \frac{δν}{μ+ν}.$$

ἑπομένως

$$λ = \frac{2μν}{(μ+ν)^2}.$$

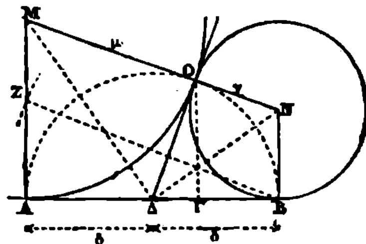
Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν μ = ν, $λ = \frac{1}{2}$. Πράγματι, τὸ παραλληλόγραμμον τότε ΕΖΘΗ εἶναι τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου καὶ τὸ μέγιστον.

2) Διὰ κορυφὰς Ε, Ζ ἴσον ἀπεχούσας τῶν μέσων τῶν (ἀντιστοίχων) πλευρῶν, ἀντιστοιχοῦν ἰσοδύναμα παραλληλόγραμμα. Διὰ Ζ ≡ Α ἢ Β, τὸ παραλληλόγραμμον ἀποβαίνει ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη διαγώνιος τοῦ τετραπλεύρου καὶ διὰ θέσεις τῆς κορυφῆς Ζ ἄνωθεν τοῦ Α (Ι) ἢ κάτωθεν τοῦ Β (Κ), τὰ ἀντίστοιχα παραλληλόγραμμα εἶναι παρεγγεγραμμένα εἰς τὸ τετράπλευρον.

Πρόβλημα 578

1655. Νὰ γραφοῦν δύο περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων καὶ δοθείσης εὐθείας εἰς ὡρισμένα σημεῖα Α, Β αὐτῆς καὶ τοιαῦται, ὥστε αἱ ἀκτῖνες των νὰ ἔχουν δεδομένον ἄθροισμα ἢ δεδομένην διαφορὰν ἢ νὰ εὑρίσκωνται εἰς δοθέντα λόγον πρὸς ἀλλήλας.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ φέροντες τὴν συνδέουσαν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ο μετὰ τοῦ μέσου Δ τῆς ΑΒ εὐθεῖαν, ὡς καὶ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν διάκεντρον ΒΖ, παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι:



Σχ. 1075.

1) Ἡ περιφέρεια ΑΟΒ εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς Ο τῶν δύο περιφερειῶν καὶ ἡ περιβάλλουσα τῶν διακέντρων αὐτῶν ΜΝ.

2) Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΖ ἔχει μίαν κάθετον πλευρὰν ΑΒ ὡρισμένην $= 2\delta$, τὴν ἄλλην ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν $\mu - \nu$ τῶν ἀκτίνων καὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα $\mu + \nu$ αὐτῶν.

Ἐκ τῶν διαπιστώσεων αὐτῶν ἕπονται αἱ κατασκευαί:

α) *Δεδομένον ἄθροισμα* $\mu + \nu = ΒΖ$. Ἡ τομὴ Ζ τῆς καθέτου εἰς τὸ Α ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τῆς περιφερείας (Β, $\mu + \nu$), ὁρίζει τὸ τρίγωνον ΑΒΖ καὶ ἡ πρὸς τὴν ΒΖ παράλληλος ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (Δ, δ) τέμνει τὰς καθέτους ΑΜ καὶ ΒΝ εἰς τὰ Α, Β ἐπὶ τὴν ΑΒ κατὰ τὰ κέντρα τῶν ζητουμένων περιφερειῶν.

β) *Δεδομένη διαφορὰ* $\mu - \nu = ΑΣ$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΖ εἶναι πάλιν κατασκευάσιμον κλπ.

γ) *Δοθεὶς λόγος* $\frac{\mu}{\nu}$. Διαιροῦμεν τὴν ΑΒ κατὰ τὸν λόγον

$$\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{\mu}{\nu}$$

καὶ ὁρίζομεν τὴν τομὴν Ο τῆς καθέτου εἰς τὸ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τῆς περιφερείας (Δ, δ). Ἡ εἰς τὸ Ο ἐφαπτομένη τέμνει τὰς ΑΜ καὶ ΒΝ κατὰ τὰ κέντρα Μ καὶ Ν τῶν ζητουμένων περιφερειῶν.

Πρόβλημα 578—I

1655 α. Ὅμοιον πρόβλημα: Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι δεδομένον τετράγωνον k^2.

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΜΔ, ΒΔΝ ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\mu\nu = \delta^2$$

καὶ ἐκ τῆς δοθείσης εἰς τὴν ἐκφώνησιν τὴν

$$\mu^2 + \nu^2 = k^2.$$

Κατασκευάζονται ἑπομένως τὰ μήκη μ, ν καὶ τὸ πρόβλημα λύεται εὐκόλως.

Ἀπὸ ἀπόψεως κατασκευῶν, εἶναι προτιμότερον νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων. Λαμβάνομεν

$$(\mu+\nu)^2=\mu^2+\nu^2+2\mu\nu=k^2+2\delta^2.$$

Παρατήρησις. Διὰ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων, εὑρίσκομεν

$$(\mu-\nu)^2=k^2-2\delta^2.$$

Θὰ πρέπει λοιπὸν διὰ τὴν δυνατότητα τῆς κατασκευῆς νὰ εἶναι

$$k\geqslant\delta\sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 578—II

1655 β. Νὰ γραφοῦν δύο περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων, ἐφαπτόμεναι δύο δοθεισῶν εὐθειῶν εἰς δεδομένα σημεῖα Α καὶ Β αὐτῶν καὶ τοιαῦται, ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων των νὰ εἶναι δοθεὶς ἀριθμὸς λ.

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο συμπληρώνει τὸ τῆς § 960, 4η Περίπτωσις.

Βλ.: *Manuel du conducteur des Ponts et Chaussées* ὑπὸ Endrès.— N. A. (1858), σ. 177. — *Mathesis*, (1884), σ. 42.

Πρόβλημα 578—III

1655 γ. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων καὶ μιᾶς περιφερείας εἰς δεδομένα σημεῖα αὐτῆς Α, Β καὶ τοιαῦται, ὥστε αἱ ἀκτῖνες των x, y νὰ πληροῦν μίαν τῶν ἑπομένων συνθηκῶν:

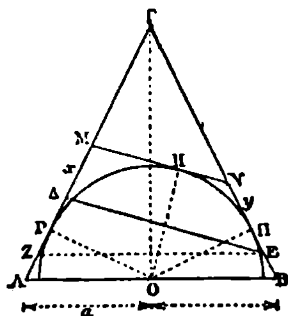
1) $x+y=\lambda$, 2) $x-y=\delta$, 3) $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\mu}{\nu}$, 4) $x^2\pm y^2=k^2$.

1) Διὰ τὸ ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν ἤδη δοθεῖσαν κατασκευὴν τῆς § 872.

2) Διὰ τὰς ἄλλας περιπτώσεις καταφεύγομεν εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν μέθοδον, χρησιμοποιοῦντες τὴν γνωστὴν σχέσιν (§ 329)

$$(x+\beta)(y+\beta)=\alpha^2.$$

Πρόβλημα 578—IV



Σχ. 1076.

1655 δ. Δίδεται τρίγωνον σκαληνὸν ΓΔΕ. Ζητεῖται ὅπως ἀχθῇ τέμνουσα ΜΝ τῶν πλευρῶν ΓΔ, ΓΕ τοιαύτη, ὥστε τὸ μὲν τμῆμα ΜΝ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων $ΜΔ=x$ καὶ $ΝΕ=y$, τὰ δὲ τμήματα ταῦτα νὰ πληροῦν μίαν δοθεῖσαν συνθήκην, ὡς λ. χ. τὴν

$$x\pm y=\lambda,\quad \text{ἢ}\quad x^2\pm y^2=k^2,$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{x}{y}=\frac{\mu}{\nu}\quad \text{ἢ}\quad xy=\lambda^2.$$

Ἀναφερόμενοι εἰς τὰ ζητήματα τῶν §§ 872 καὶ 963, ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς μικροτέρας πλευρᾶς ΓΔ τμῆμα $ΓΖ=ΓΕ$ καὶ νὰ ὁρίσωμεν τὴν παρεγγεγραμμένην εἰς τὸ τρίγωνον περιφέρειαν

(Ο), δι' ἀγωγῆς τῆς καθέτου ΡΟ εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΔΖ καὶ μέχρι τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ. Διὰ πᾶσαν ἐφαπτομένην ΜΝ τῆς περιφερείας ταύτης θὰ εἶναι

$$\text{ΜΝ} = \text{ΜΡ} + \text{ΝΠ} = \text{ΜΔ} + \text{ΝΕ} = x + y. \qquad (\alpha)$$

Ἀφ' ἑτέρου (§ 325, *Μέθοδοι*), ἔχομεν

$$\text{ΑΜ} \,.\, \text{ΒΝ} = \text{ΑΟ}^2,$$

ἤ

$$(x + \text{ΑΔ})\,(y + \text{ΒΕ}) = \alpha^2. \qquad (\beta)$$

Ἐπειδὴ τὰ μήκη ΟΑ $= \alpha$, ΑΔ, ΒΕ εἶναι ἀμέσως ὡρισμένα ἐκ τοῦ δοθέντος τριγώνου ΓΔΕ, ἡ σχέσις (β) καὶ ἡ τυχοῦσα ἐκ τῶν συνθηκῶν τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος ὁρίζουν ἓν σύστημα δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς τὰ ἄγνωστα μήκη x, y. Εἶναι ἑπομένως ταῦτα κατασκευάσιμα.

Παρατήρησις. Ἐὰν δοθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ἢ ἡ τιμὴ τοῦ μήκους ΜΝ, ἀναγόμεθα εἰς πολὺ ἁπλῆν κατασκευήν. (Βλ. § 873).

Πρόβλημα 579

1656. **Διὰ δοθέντος σημείου Α ἐντὸς κύκλου (Ο), νὰ ἀχθῇ χορδὴ ΜΑΝ τοιαύτη, ὥστε ὁ τομεὺς ΜΟΝΑΜ νὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰ $\frac{5}{12}$ τοῦ κύκλου.**

Ἐπειδὴ καὶ τὸ τόξον ΝΛΜ θὰ εἶναι τὰ $\frac{5}{12}$ τοῦ μήκους τῆς ὅλης περιφερείας, ἀγόμεθα εἰς τὴν διαίρεσιν τῆς περιφερείας εἰς δώδεκα ἴσα τόξα, εἰς τὴν ἀγωγὴν χορδῆς ΓΔ ὑποτεινούσης, πέντε διαδοχικὰ τῶν τόξων τούτων καὶ εἰς τὴν ἀγωγὴν ἐκ τοῦ Α μιᾶς ἐφαπτομένης πρὸς τὴν ὁμόκεντρον τῆς δοθείσης περιφέρειαν καὶ ἥτις ἐφάπτεται τῆς χορδῆς ΓΔ.

Σχ. 1077.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, μίαν ἢ καμμίαν, ἀναλόγως τῆς θέσεως τοῦ σημείου Α πρὸς τὴν περιφέρειαν (Ο, ΟΒ).

Πρόβλημα 580

1657. **Διὰ δοθέντος σημείου Α περιφερείας, φέρομεν δύο μεταβλητὰς χορδὰς ΑΜ, ΑΝ, ἀλλὰ τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι δοθὲν k^2. Ποία εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς χορδῆς ΜΝ;**

(*Μέθοδοι*, § 124).

Πρόβλημα 580—1

1658. **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τοῦ γινομένου $\beta\gamma = k^2$, τοῦ ὕψους $υ_\alpha$ καὶ τῆς διαμέσου μ_α.**

Ἡ διάμετρος $\delta = 2R$ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἶναι ὡρισμένη ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως

$$\beta\gamma = 2Rυ_\alpha\,,$$

ἢ $$\delta = \frac{k^2}{\upsilon_\alpha}.$$

Τὸ δὲ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΜΗ εἶναι κατασκευάσιμον, ἀφοῦ εἶναι γνωσταὶ ἡ ὑποτείνουσα $AM = \mu_\alpha$ καὶ ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν, $AH = \upsilon_\alpha$.

Τὸ κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΜΗ εἰς τὸ Μ· (μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ) καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα $R = \frac{\delta}{2}$. Εἶναι ἐπομένως κατασκευάσιμον τὸ σημεῖον αὐτό, ἄρα καὶ ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὸ ζητούμενον τρίγωνον περιφέρεια.

Σχ. 1078.

Αἱ τομαὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ τῆς εὐθείας ΜΗ ὁρίζουν τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 581

1659. **Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν (Ο, Ρ), νὰ περιγραφῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχον ἄθροισμα ἴσων πλευρῶν ἐλάχιστον.**

Ἔστω ΒΓΒ′ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Κατὰ τὸ γενικὸν θεώρημα τοῦ Νεύτωνος (§§ 168, 168 α), αἱ κάθετοι εἰς τὰ Β, Γ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΧ, ΑΥ τοῦ σχήματος καὶ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν, θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ. Θὰ πρέπει ἐπομένως, ὡς ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται, νὰ εἶναι

$$\Gamma E = B\Delta,$$

ὅπου Δ ἡ προβολὴ ἐπὶ τὴν ΒΓ τοῦ σημείου Α.

Σχ. 1079.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε *διαιρεῖ τὴν πλευρὰν* ΒΓ *κατὰ μέσον καὶ ἄκρον λόγον.*

Τὰ ὅμοια πράγματι, τρίγωνα ΒΑΓ, ΒΔΑ δίδουν τὴν σχέσιν

$$\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{AB}{B\Delta} \quad \text{ἢ} \quad B\Gamma . B\Delta = AB^2.$$

Ἀλλ' εἶναι $\Delta B = \Gamma E$ καὶ $BA = BE$· ἐπομένως

$$BE^2 = B\Gamma . \Gamma E.$$

Κατασκευή. Ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ ἐφαπτομένης ΒΓ, διαιρουμένης διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, δὲν εἶναι δυνατὴ διὰ τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ διαβήτου. Δυνάμεθα ὅμως νὰ κατασκευάσωμεν ἓν σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον καὶ νὰ εὕρωμεν τοῦτο τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀντιθέτου προβλήματος (ἢ, ἁπλούστερον, διὰ ὁμοιοθεσίας).

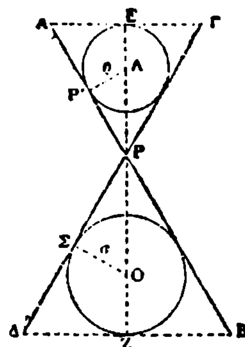
Λαμβάνομεν πρὸς τοῦτο τυχοῦσαν εὐθεῖαν βγ, διαιρουμένην εἰς τὸ σημεῖον ε κατὰ μέσον καὶ ἄκρον λόγον, μεταφέρομεν ἐπ' αὐτῆς τὸ τμῆμα γε ἐπὶ τοῦ βδ καὶ τέμνομεν τὴν εἰς τὸ δ κάθετον ἐπὶ τὴν βγ διὰ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον β καὶ ἀκτῖνα βδ.

Ἂν α εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς, αἱ κάθετοι εἰς τὸ α ἐπὶ τὴν βα καὶ εἰς τὸ ε ἐπὶ τὴν βγ, ὁρίζουν τὸ κέντρον περιφερείας (ο), διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς βγ ἔχει τὴν θέσιν τῆς ζητουμένης εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα ἐφαπτομένης ΒΓ. Καὶ ἡ κατασκευὴ τῆς τελευταίας ταύτης εὐθείας, ἄρα καὶ τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΒΓΒ', εἶναι ἄμεσος διὰ τῆς ὁμοιοθεσίας μὲ κέντρον Α καὶ μετασχηματιζούσης τὴν περιφέρειαν (ο) εἰς τὴν δοθεῖσαν (Α, Ε, Ε').

Πρόβλημα 581—Ι

1659 α. Δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΡΒ, ΓΡΔ, ἴσου μήκους λ, μεταβάλλονται εἰς τρόπον, ὥστε νὰ τέμνωνται κατὰ γωνίαν 60° καὶ νὰ εἶναι πάντοτε διαγώνιοι ἰσοσκελοῦς τραπεζίου. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μηκῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν περιφερειῶν, αἵτινες ἐγγράφονται εἰς τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΡΓ καὶ ΒΡΔ.

Ποῖον τὸ ἐλάχιστον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος ;



Σχ. 1079 (α).

1) Τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι σταθερόν, ἀφοῦ

$$2\pi(\rho+\sigma)=2\pi(\text{ΕΛ}+\text{ΖΟ})=$$

$$=\frac{2\pi}{3}(\text{ΕΖ})=\frac{2\pi\lambda\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi\lambda\sqrt{3}}{3}.$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν εἶναι

$$\pi(\rho^2+\sigma^2).$$

Ἐπειδὴ δὲ $\rho+\sigma=$ σταθερὸν μῆκος, τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος τούτου λαμβάνεται διὰ $\rho=\sigma$. Εἶναι δηλ. τὸ ἐλάχιστον τοῦτο τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ σχηματιζόμενον κατὰ τὴν σύμπτωσιν τῶν περάτων Α καὶ Γ τῶν κινητῶν εὐθειῶν.

Παρατήρησις. Ἐὰν αἱ θεωρηθεῖσαι ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι μεταβάλλωνται εἰς τρόπον, ὥστε αἱ προεκτάσεις των τώρα νὰ τέμνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν 60° καὶ αἱ ἴδιαι νὰ ἀποτελοῦν τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, ἡ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων ρ καὶ σ θὰ ἦτο σταθερὰ ποσότης.

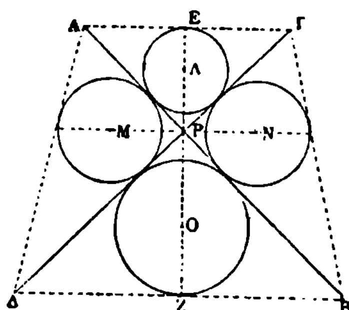
Πρόβλημα 581—ΙΙ

1659 β. Ὅμοιον πρὸς τὸ προηγούμενον πρόβλημα. Αἱ εὐθεῖαι τέμνονται ὀρθογωνίως καὶ θεωροῦμεν τὰς ἐγγεγραμμένας περιφερείας εἰς τὰ τέσσαρα σχηματιζόμενα τρίγωνα.

1) *Διὰ τὸ ζεῦγος* (Λ) *καὶ* (Ο) *τῶν περιφερειῶν,* τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν των εἶναι σταθερόν. Τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ

λαμβάνεται ὅταν αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι καὶ τὸ μέγιστον ὅταν τὰ πέρατα Α καὶ Γ συμπίπτουν.

2) *Διὰ τὸ ζεῦγος* (Μ) *καὶ* (Ν), παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΡΔ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα ΡΑ + ΡΔ μεῖον ἡ ὑποτείνουσα ΑΔ (§ 741, Παρ/σις)· ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι σταθερὸν (= λ), τὸ μέγιστον τῆς ἀκτῖνος ρ θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ ἐλάχιστον τῆς ὑποτεινούσης. Τοῦτο δὲ συμβαίνει ὅταν τὸ σημεῖον Ρ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ ἢ ΓΔ.



Σχ. 1079 (β).

Τὸ ἐλάχιστον τῆς ρ εἶναι τὸ μηδὲν καὶ λαμβάνεται ὅταν τὰ πέρατα Α καὶ Γ συμπίπτουν.

Τὸ μέγιστον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἰδίων περιφερειῶν λαμβάνεται ταυτοχρόνως μετὰ τοῦ ἐλαχίστου ἀθροίσματος τῶν μηκῶν των.

Τοῦ συνόλου τῶν τεσσάρων περιφερειῶν, τὸ μέγιστον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων των ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αὗται εἶναι ἴσαι. Εἶναι δὲ τοῦτο διπλάσιον τοῦ ἐλαχίστου ἀθροίσματος, λαμβανομένου διὰ Α ≡ Γ.

Εἰς τὰς δύο ὁριακὰς θέσεις τοῦ σχήματος, δηλ. ἐκείνας καθ' ἃς οἱ τέσσαρες κύκλοι εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους ἢ τρεῖς αὐτῶν μηδενίζονται, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων ἴσων κύκλων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μοναδικοῦ κύκλου (τῆς δευτέρας ὁριακῆς θέσεως).

Διαίρεσις τῶν σχημάτων

Πρόβλημα 582

1660. **Διὰ δοθέντος σημείου ἐπὶ τῆς περιμέτρου τριγώνου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.**

Σημείωσις. Διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως, ὡς καὶ τῶν ἑπομένων μέχρι καὶ τῆς 592 ας, βλέπε 2αν ἔκδοσιν τῶν *Exercices de Géométrie.*

Πρόβλημα 582—I

1661. **Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων διὰ δύο δοθέντων σημείων ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου.**

Πρόβλημα 583

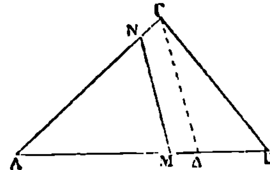
1662. **Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς μέρη ἀνάλογα τριῶν μηκῶν μ, ν, λ, δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

Πρόβλημα 584

1663. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας καθέτου ἐπὶ μίαν πλευρὰν αὐτοῦ.

Πρόβλημα 584—I

1663 α. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας ΜΝ παραλλήλου πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (ε).



Σχ. 1079 (γ).

Ἔστω ΓΔ ἡ ἐκ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν (ε) καὶ $2\alpha^2$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου. Τὸ ἐμβαδὸν δ^2 τοῦ τριγώνου ΑΓΔ εἶναι

$$\delta^2 = \frac{2\alpha^2 . \text{Α}\Delta}{\text{ΑΒ}} .$$

Ἀφ' ἑτέρου,

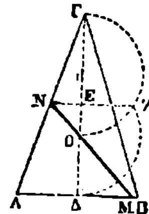
$$\frac{\text{ΑΜ}^2}{\text{Α}\Delta^2} = \frac{\alpha^2}{\delta^2} .$$

Ἑπομένως,

$$\text{ΑΜ}^2 = \frac{\alpha^2 . \text{Α}\Delta^2}{\delta^2} \quad \text{κλπ.}$$

Πρόβλημα 585

1664. Διὰ σημείου Ο ἐπὶ τοῦ ἐπὶ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ὕψους, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.



Σχ. 1080.

Ἔστω ΜΟΝ ἡ εὐθεῖα αὐτη. Τὸ τρίγωνον ΔΟΜ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΟΝΓ, ἐπειδὴ αἱ ἰσοδύναμοι ἐπιφάνειαι ΓΒΔ καὶ ΓΒΜΝ ἔχουν κοινὸν μέρος τὸ ΓΟΜΒ. Ἑπομένως

$$\text{Ο}\Gamma . \text{ΝΕ} = \text{Ο}\Delta . \Delta\text{Μ}. \qquad (1)$$

Καὶ ἐπειδὴ

$$\frac{\Delta\text{Μ}}{\text{ΝΕ}} = \frac{\text{Ο}\Delta}{\text{ΟΕ}} ,$$

ἢ

$$\Delta\text{Μ} . \text{ΟΕ} = \text{Ο}\Delta . \text{ΝΕ}, \qquad (2)$$

διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$\text{Ο}\Gamma . \text{ΟΕ} = \text{Ο}\Delta^2.$$

Εἶναι δηλ. τὸ μῆκος ΟΕ τρίτη ἀνάλογος γνωστῶν μηκῶν καὶ εὐκόλως κατασκευάσιμον.

Πρόβλημα 585—I

1665. Τὸ αὐτὸ ζήτημα διὰ σημεῖον Ο ἐπὶ διαμέσου τυχόντος τριγώνου.

Πρόβλημα 586

1666. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν τεμνουσῶν τὰς βάσεις του.

Πρόβλημα 587

1667. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Πρόβλημα 588

1668. Νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τραπεζίου διαιροῦσα αὐτὸ εἰς μέρη ἔχοντα λόγον δοθέντα.

Πρόβλημα 589

1669. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθείας ἀγομένης διὰ δοθέντος σημείου.

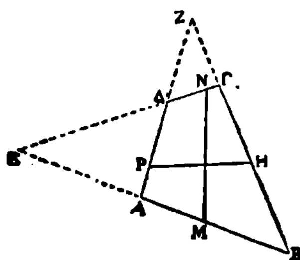
(*Μέθοδοι*, § 254).

Πρόβλημα 590

1670. Νὰ διαιρεθῇ τετράπλευρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας ἀγομένης διὰ δοθέντος σημείου τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

Πρόβλημα 590—I

1670 α. Νὰ διαιρεθῇ τετράπλευρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα διὰ τῆς βραχυτέρας εὐθείας.



Σχ. 1080 α

Ἔστω $2\alpha^2$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου καὶ ΜΝ ἡ εὐθεῖα αὕτη. Θὰ πρέπει ἡ ΜΝ νὰ εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΔΓ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΜΝΕ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$(\text{ΑΔΕ}) + \alpha^2.$$

Δι' ἐναλλαγῆς τῶν ρόλων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΔΓ πρὸς τὸν τῶν ΑΔ, ΒΓ, ἀγόμεθα εἰς τὴν ἀναλόγου θέσεως πρὸς τὴν ΜΝ, εὐθεῖαν ΡΠ. Ἡ μικροτέρα τῶν εὐθειῶν ΜΝ καὶ ΡΠ εἶναι ἡ ζητουμένη. (Παρβ. § 1682 β).

Πρόβλημα 591

1671. Νὰ διαιρεθῇ πολύγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα ἢ ἔχοντα λόγον δοθέντα, δι' εὐθείας ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου τῆς περιμέτρου του.

Πρόβλημα 592

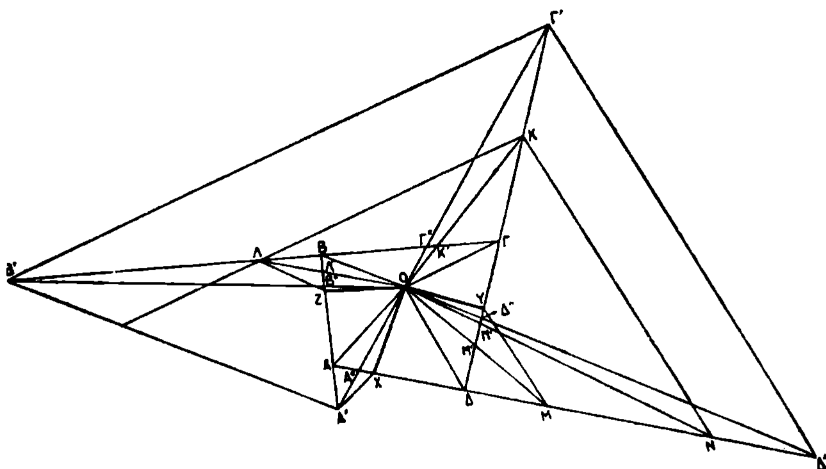
1672. Διὰ δοθέντος σημείου ἐντὸς δοθέντος σχήματος, νὰ ἀχθοῦν εὐθεῖαι διαιροῦσαι αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα ἢ ἔχοντα λόγον δοθέντα ἀριθμόν.

Πρόβλημα 593

1673. Νὰ διαιρεθῇ πολύγωνον εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων μηκῶν δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ δοθέντος σημείου Ο εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου (καὶ ἐκ τῶν ὁποίων δίδεται ἡ μία ἐξ αὐτῶν).

Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν πολύγωνον. Ζητοῦμεν νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ εἰς τρία μέρη, ἀνάλογα τῶν μηκῶν x, y, z, δι' εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ καὶ τῶν ὁποίων μία ἐξ αὐτῶν, ἡ ΟΧ, δίδεται.

1) Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Διὰ τοῦ σημείου Χ φέρομεν εὐθεῖαν ΧΑ' παράλληλον



Σχ. 1081

πρὸς τὴν ΟΑ καὶ τὰς Α'Β', Β'Γ', Γ'Δ' παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ.

Ἕνεκα τῶν τριγώνων τοῦ σχήματος, μὲ κοινὰς βάσεις καὶ τὰς κορυφάς των ἐπὶ παραλλήλων, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας

$$(\Delta'OX) = (OX\Delta\Delta'') + (\Delta\Delta'\Delta''),$$

$$(\Delta\Delta'\Delta'') = (O\Delta''\Gamma') = (O\Delta''\Gamma\Gamma'') + (\Gamma\Gamma'\Gamma''),$$

$$(\Gamma\Gamma'\Gamma'') = (OB'\Gamma'') = (O\Gamma''BB'') + (BB'B''),$$

$$(BB'B'') = (OA'B'') = (OB''AA'') + (AA'A''),$$

$$(AA'A'') = (OA''X),$$

ἐκ τῶν ὁποίων, διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$(\Delta'OX) = (OX\Delta\Delta'') + (O\Delta''\Gamma\Gamma'') +$$

$$+ (O\Gamma''BB'') + (OB''AA'') + (OA''X),$$

ἢ

$$(\Delta'OX) = (AB\Gamma\Delta).$$

2) Διαιροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ΧΔ' εἰς τρία μέρη ΧΜ, ΜΝ, ΝΔ', ἀνάλογα τῶν μηκῶν x, y, z καὶ φέρομεν τὰς ΜΥ, ΝΚ παραλλήλους πρὸς τὴν ΟΔ, ΚΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΟΓ καὶ ΛΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΟΒ. Λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ διαιροῦν

τὸ τετράπλευρον εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΟΧΜ, ΟΜΝ, ΟΝΔ', δηλ. ἀνάλογα τῶν μηκῶν x, y, z.

Πράγματι, ἕνεκα πάλιν τῶν τριγώνων τοῦ σχήματος μὲ κοινὰς βάσεις καὶ τὰς κορυφὰς των ἐπὶ παραλλήλων, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας

$$(ΟΧΜ) = (ΟΧΔ) + (ΔΜΟ),$$

$$(ΔΜΟ) = (ΟΔΥ).$$

Ἄρα $(ΟΧΜ) = (ΟΧΔ) + (ΟΥΔ) = (ΟΧΔΥ).$

Ἐπίσης, $(ΟΧΝ) = (ΟΧΔ) + (ΟΔΝ),$

$$(ΟΔΝ) = (ΟΔΚ) = (ΟΔΓΚ') + (Κ'ΓΚ),$$

$$(Κ'ΓΚ) = (ΟΚ'Λ) = (ΟΚ'ΒΛ') + (ΒΛΛ'),$$

$$(ΒΛΛ') = (ΟΛ'Ζ).$$

Διὰ προσθέσεως λαμβάνομεν

$$(ΟΧΝ) = (ΟΧΔ) + (ΟΔΓΚ') + (ΟΚ'ΒΛ') + (ΟΛ'Ζ)$$

ἤ $(ΟΧΝ) = (ΟΧΔΓΒΖ).$

Ἀλλ' εἶναι $(ΟΧΝ) = (ΟΧΜ) + (ΟΜΝ)$

καὶ $(ΟΧΔΓΒΖΟ) = (ΟΧΔΥ) + (ΟΥΓΒΖΟ) = (ΟΧΜ) + (ΟΥΓΒΖΟ).$

Ἄρα $(ΟΥΓΒΖΟ) = (ΟΜΝ),$

καὶ συνεπῶς $(ΟΖΑΧ) = (ΟΝΔ').$

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως δι' οἱονδήποτε πλῆθος μερῶν.

1673 α. ***Σημείωσις.*** Ἡ ἀνωτέρω ὡραία λύσις τοῦ Euzet ἐδημοσιεύθη τὸ 1854 εἰς τὰ Ν. Α., σ. 114 καὶ ἐπανευρέθη ἀργότερον ὑπὸ τοῦ M. d'Ocagne (*J. d. M.*, τοῦ Bourget, 1878, σ. 332 καὶ 1880, σ. 487.—*Mathesis*, 1881, σ. 109).

Πρόβλημα 593—I

1674. **Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τριγώνου σημεῖον ἐκ τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς διαιροῦν αὐτὸ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν μηκῶν μ, ν, λ.** (Lez, Ν. Α. 1879, σ. 432).

Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τομὴ δύο ὑπερβολῶν (Moret - Blanc, Ν. Α., 1880, σ. 462).

Διὰ μ=ν=λ, ἀγόμεθα εἰς τὸ Πρόβλημα τοῦ Bobillier (§ 1624 α).

Πρόβλημα τοῦ Gergonne 593—II

1674 α. **Τῇ βοηθείᾳ μόνον ἡμιπεριφερειῶν νὰ διαιρεθῇ κύκλος εἰς μέρη ἔχοντα τὴν αὐτὴν περίμετρον.**

1) Τὰ μέρη ταῦτα πρέπει νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

2) Ὁ κύκλος νὰ διαιρῆται δι' αὐτῶν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. (§ 1581).

An. d. Gerg., τόμ. I, 1810 - 1811, σ. σ. 159 καὶ 240, λύσις τοῦ Lhuillier καὶ τόμ. VI, 1815 - 1816, γενικὴ λύσις τοῦ Gergonne.

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν πολυγώνων

1674β. Ἡ διαίρεσις ἑνὸς πολυγώνου εἰς δύο μέρη ἔχοντα δοθέντα λόγον δι' εὐθείας συναντώσης δύο τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν τομὴν τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας ΧΟΥ ὑπὸ εὐθείας ΜΝ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ὁριζόμενον τρίγωνον ΜΟΝ νὰ ἔχῃ δοθὲν ἐμβαδὸν $2k^2$.

Κατὰ μίαν ἰδιότητα τῆς ὑπερβολῆς, ἡ ΜΝ πρέπει νὰ ἐφάπτεται τῆς ὑπερβολῆς ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας ΧΟΥ τὴν

$$xy = k^2. \qquad (\alpha)$$

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τρεῖς περιπτώσεις:

1) Ἡ εὐθεῖα ΜΝ ὀφείλει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

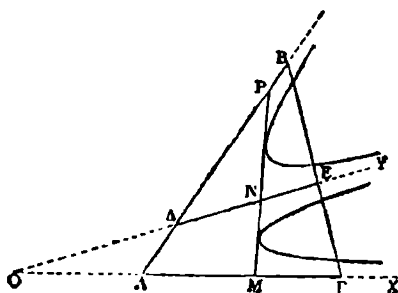
2) Νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου.

3) Νὰ ἔχῃ τὸ ἐλάχιστον μῆκος· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ εὐθεῖα αὐτη ἐφάπτεται τῆς καμπύλης (α) εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

Εἰς τὰς τρεῖς ταύτας περιπτώσεις, ἡ ἀγωγὴ τῆς εὐθείας ΜΝ δὲν ἀπαιτεῖ τὴν κατασκευὴν τῆς καμπύλης (§§ 1618, 1619 α καὶ β)· ἐν τούτοις, ἡ θεώρησις τῆς ὑπερβολῆς ταύτης εἶναι χρήσιμος διὰ τὴν ἀνεύρεσιν τῆς λύσεως καὶ μάλιστα ὅταν προστίθενται καὶ συμπληρωματικαὶ συνθῆκαι, ὡς λ. χ. εἰς τὸ ἑπόμενον *πρόβλημα τοῦ Huygens.*

1674γ. *Πρόβλημα τοῦ Huygens* (περὶ τὸ 1650).

Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τέμνουσα αὐτὸ εὐθεῖα ΔΕ. Νὰ ἀχθῇ δευτέρα τέμνουσα ΜΝΡ εἰς τρόπον, ὥστε ἕκαστον τῶν δύο μερῶν ΔΒΕ καὶ ΑΓΕΔ νὰ διαιρῆται ὑπ' αὐτῆς εἰς ἰσοδύναμα τμήματα.



Σχ. 1061 α

Ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη δύο ὑπερβολῶν. Τὸ γενικὸν πρόβλημα τῆς ἀγωγῆς κοινῆς ἐφαπτομένης δύο ὑπερβολῶν μᾶς ὁδηγεῖ εἰς ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ· ἀλλ' ἐπὶ τοῦ προκειμένου, αἱ δύο καμπύλαι ἔχουν κοινὴν ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν ΟΔΕΥ καὶ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ριζῶν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως καὶ ἥτις εἶναι δυνατὴ διὰ τῆς χρήσεως τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου μόνον.

(*Int. d. Math.*, 1907, σ. 126, n° 3232, D.-J. Corteweg).

Ἐὰν θέσωμεν

$$AB = \alpha,\ B\Gamma = \beta,\ \Gamma A = \gamma,\ B\Delta = \delta,\ BE = \varepsilon,\ AM = x,$$

$$4\delta - 2\alpha - \frac{\delta^2}{\alpha} - \frac{\delta\varepsilon}{\beta} = p, \quad \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta\varepsilon}{2\beta} = q,$$

ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις εἶναι ἡ

$$px^2 + 2(\alpha - \delta)\gamma x - \gamma^2 q = 0.$$

I. M. 1908, σ. 186, H. Brocard).

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ ἐπιβάλλοντες εἰς τὸ πρόβλημα μίαν τῶν προηγουμένων 1), 2) ἢ 3) συνθηκῶν, ὁπότε τὸ πρόβλημα τοῦ Huygens καθίσταται εὐκολώτερον. Τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει καὶ διὰ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα, ὀφειλόμενον εἰς τὸν Leibniz:

1674δ. **Νὰ διαιρεθῇ τυχὸν τρίγωνον εἰς τέσσαρα μέρη ἰσοδύναμα διὰ δύο εὐθειῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας.** (Traité de Géomètrie, τῶν Rouché καὶ Comberousse, ἑβδόμη ἔκδοσις, σ. 416, n⁰ 453).

Τὸ πρόβλημα τοῦ Leibniz ἔτυχε πολυαρίθμων ἀλλ' ἀνεπιτυχῶν προσπαθειῶν πρὸς ἀνεύρεσιν τῆς λύσεώς του· ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐπιλυθῇ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

Καὶ πρὸς τὸν σκοπὸν ὅπως τεθῇ τέρμα εἰς ἀκάρπους ἐρεύνας, τὸ *Interm. des. Math.* ἐδημοσίευσε ἐνδιαφέροντα ἄρθρα σχετικὰ πρὸς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα (1894, σ. 30, ἱστορικὸν ὑπὸ Lemoine· μαθηματικὴ σπουδὴ ὑπὸ E. de Jonquières σ. 55 καὶ 62· ἔρευνα ἐπὶ τῶν ἔργων τοῦ Leibniz ὑπὸ Gino - Loria), σ. 135.

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

Πολύγωνα

Πρόβλημα 594

1675. **Ποῖον τὸ μέγιστον ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὴν αὐτὴν ἀντικειμένην γωνίαν Α;**

Τὸ ἔχον κορυφὴν τὸ μέσον τοῦ τόξου (Β, Γ, $\widehat{A}$).

Πρόβλημα 595

1676. **Ποῖον τὸ μέγιστον ἐκ τῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου;**

Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ δύο τῶν τριγώνων τούτων, ἐξ ὧν τὸ δεύτερον ἰσοσκελές. Θὰ ἔχωμεν

$$ΑΔ + ΔΒ = ΑΓ + ΓΒ.$$

Σχ. 1082.

Διὰ τῶν κορυφῶν Γ, Δ φέρομεν παραλλήλους ΓΕ, ΔΖ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου καὶ ἔστωσαν Μ, Ν τὰ συμμετρικὰ τοῦ σημείου Β πρὸς τὰς εὐθείας ταύτας. Ἐπειδή:

$$ΑΓ + ΓΜ = ΑΓ + ΓΒ,$$

καὶ εὐθεῖα $\quad ΑΔΝ = ΑΔ + ΔΒ$

ἕπεται: $\quad ΑΝ = ΑΓ + ΓΜ.$

Θὰ πρέπει λοιπὸν ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΓ + ΓΜ = ΑΝ νὰ ἀπολήγῃ εἰς σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Β καὶ Ν κείμενον· ἐπειδὴ ἄλλως θὰ ἦτο προφανῶς μεγαλυτέρα τῆς ΑΝ. Θὰ εἶναι ἑπομένως τὸ μῆκος ΒΝ, δηλ. τὸ διπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, μεγαλύτερον τοῦ ΒΜ, τὸ ὁποῖον εἶναι διπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Εἶναι δηλ. τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ τῆς μεγαλυτέρας ἐπιφανείας.

Ἄλλη ἀπόδειξις. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου μὲ πλευρὰς α, β, γ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \quad (2\tau = \alpha+\beta+\gamma). \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δύο τῶν παραγόντων τῆς ὑπορίζου ποσότητος, οἱ τ καὶ τ — α εἶναι ἀμετάβλητοι, ἐνῷ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων μεταβλητῶν παραγόντων εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενον (1) καθίσταται, ὡς γνωστόν, μέγιστον ὅταν οἱ δεύτεροι οὗτοι παράγοντες ἀποβοῦν ἴσοι

$$\tau - \beta = \tau - \gamma.$$

Τὸ μέγιστον δηλ. τρίγωνον ἐκ τῶν θεωρουμένων εἶναι τὸ ἰσοσκελές.

Πρόβλημα 596

1677. **Ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ποῖον τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου;**

Ἔστω Α τυχὸν τρίγωνον καὶ Β, Γ δύο ἄλλα ἰσόπλευρα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον ἰσοπεριμετρικὸν πρὸς τὸ Α καὶ τὸ δεύτερον ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό. Ἔστω δὲ 2τ ἡ κοινὴ περίμετρος τῶν Α καὶ Β καὶ 2τ′ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου Γ.

Ἐκ τῶν δύο ἰσοπεριμετρικῶν τριγώνων Α καὶ Β, τὸ ἰσόπλευρον Β θὰ εἶναι τὸ μεγαλύτερον. Ἑπομένως

$$(\Gamma) = (A) < (B)$$

καὶ

$$2\tau' < 2\tau,$$

ἀφοῦ τὰ Γ καὶ Β εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα. Ἔχει κατὰ ἀκολουθίαν τὸ ἰσόπλευρον καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ Α τρίγωνον Γ περίμετρον μικροτέραν τῆς περιμέτρου τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου Β καὶ ἰσοπεριμετρικοῦ πρὸς τὸ Α. Δηλαδή:

Ἐκ τῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας, τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον.

Πρόβλημα 597

1678. **Ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν περίμετρον, ποῖον τὸ μέγιστον;**

1η Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν x, y, z αἱ μεταβληταὶ πλευραί, 2τ ἡ σταθερὰ περίμετρος καὶ Ε τὸ ἐμβαδόν. Ἐπειδὴ

$$E = \sqrt{\tau(\tau-x)(\tau-y)(\tau-z)}$$

καὶ $(\tau-x)+(\tau-y)+(\tau-z)=\tau$, τὸ μέγιστον τῆς ποσότητος Ε λαμβάνεται διὰ

$$\tau - x = \tau - y = \tau - z \quad \text{ἢ διὰ} \quad x = y = z = \frac{2\tau}{3},$$

δηλ. διὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

2α Ἀπόδειξις. Ὑποθέσωμεν πρὸς στιγμὴν τὴν πλευρὰν x ἀμετάβλητον. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν $y+z$ θὰ ἦτο

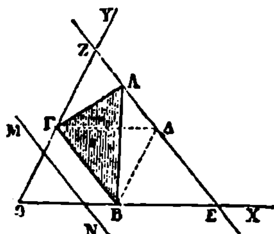
τότε ἀμετάβλητον, ἀφοῦ θὰ ἦτο ἴσον πρὸς $2\tau - x$, καὶ κατὰ τὴν § 1676 τὸ μέγιστον ἐκ τῶν τριγώνων τούτων θὰ ἦτο ἰσοσκελὲς ἢ $y = z$.

Ἐὰν ὅμως ἡ πλευρὰ x εἶχεν διάφορον μῆκος τῆς y, τὸ τελευταῖον τοῦτο τρίγωνον Ε′ δὲν θὰ ἦτο τὸ μέγιστον· ἐπειδὴ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ποὺ θὰ εἶχε τὴν πλευρὰν z ἀμετάβλητον καὶ τὰς δύο ἄλλας ἴσας πρὸς $\frac{2\tau - z}{2}$ θὰ ἦτο μεγαλύτερον τοῦ Ε′.

Ἑπομένως $$x = y = z.$$

Πρόβλημα 597—I

1679. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΒΓ τῶν πλευρῶν γωνίας ΧΟΥ, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν ΜΝ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπου Α δοθὲν σημεῖον, νὰ ἔχῃ τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.



Σχ. 1083.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ ΕΑΖ ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Α παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τέμνουσα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

Τὰ τρίγωνα μὲ βάσιν ΒΓ καὶ τὰς κορυφὰς των ἐπὶ τῆς παραλλήλου ταύτης εἶναι πάντα ἰσοδύναμα. Ἀφ' ἑτέρου, τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον ΟΒΔΓ εἶναι τὸ ἔχον κορυφὰς Β, Δ, Γ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΕΟΖ (§ 360)· τὸ δὲ τρίγωνον ΓΒΔ, ἢ τὸ ἰσοδύναμόν του ΑΒΓ, θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου τούτου.

Εἶναι ἑπομένως τὸ μέγιστον τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ἔχον ὡς κορυφὰς Β, Γ τὰ μέσα τῶν ΟΕ, ΟΖ ([89]).

Πρόβλημα 597—II

1680. Ἐκ σημείου Ο ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΡ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν καθέτους ΟΜ, ΟΝ ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευράς. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ σημείου Ο τὸ τρίγωνον ΟΜΝ ἀποβαίνει τὸ μέγιστον;

---

89. Σημ. μετ. Τὴν ἀνωτέρω ἀπόδειξιν κρίνομεν ἀτελῆ πως. Ἁπλουστέρα λύσις, ἂν καὶ ὀλιγώτερον κομψή, θὰ ἦτο ἴσως ἡ ἑπομένη:

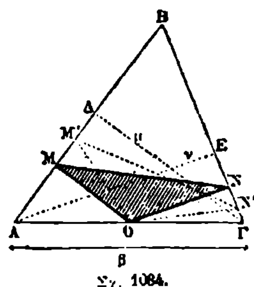
Ἔστω υ τὸ ἐκ τοῦ Ο ὕψος τοῦ τριγώνου ΟΕΖ, y τὸ μῆκος τῆς ΒΓ καὶ x ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπ' αὐτῆς. Ἐπειδὴ

$$\frac{y}{ΕΖ} = \frac{\upsilon - x}{\upsilon}$$

καὶ $$E = (ΑΒΓ) = \frac{yx}{2} = x \cdot (\upsilon - x) \cdot k, \quad (k \text{ σταθερόν})$$

εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ μέγιστον τοῦ ἐμβαδοῦ Ε λαμβάνεται διὰ $\upsilon - x = x$ ἢ $x = \frac{\upsilon}{2}$. Εἶναι δηλ. τὰ Β καὶ Γ μέσα τῶν ΟΕ καὶ ΟΖ.

1) Διὰ O≡A ἢ Γ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου μηδενίζεται. Θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν μία ἐνδιάμεσος θέσις τοῦ O διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἐμβαδὸν γίνεται μέγιστον (90).



Σχ. 1084.

2) Ἡ γωνία MON εἶναι σταθερά, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας B, τὰ δὲ τρίγωνα μὲ σταθερὰν μίαν τῶν γωνιῶν των μεταβάλλονται ἀναλόγως τοῦ γινομένου τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν ταύτην πλευρῶν αὐτῶν. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ σπουδάσωμεν τὰς μεταβολὰς τοῦ γινομένου OM . ON.

3) Ἂς ἐκφράσωμεν τὰ μήκη OM, ON συναρτήσει γνωστῶν ἄλλων μηκῶν καὶ τῶν OA, OΓ. Ἐὰν φέρωμεν τὰ ὕψη ΓΔ = μ καὶ AE = ν τοῦ δοθέντος τριγώνου, παρατηροῦμεν ὅτι θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$\frac{OM}{\mu} = \frac{AO}{\beta}, \quad OM = \frac{\mu}{\beta} . AO,$$

$$\frac{ON}{\nu} = \frac{\Gamma O}{\beta}, \quad ON = \frac{\nu}{\beta} . \Gamma O$$

καὶ

$$OM . ON = \frac{\mu\nu}{\beta^2} . AO . \Gamma O.$$

Εἶναι λοιπὸν τὸ γινόμενον OM . ON ἀνάλογον τοῦ AO . ΓO. καὶ ἐπειδὴ AO + ΓO = β = σταθερὸν μῆκος, τὸ μέγιστον τοῦ τελευταίου γινομένου, ἄρα καὶ τοῦ OM . ON, λαμβάνεται διὰ θέσιν τοῦ O συμπίπτουσαν πρὸς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AΓ (§ 343).

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἶναι συμπληρωματικὸν τοῦ τῆς § 1625.

2) Φθάνομεν ταχύτερον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δι' ἐφαρμογῆς μιᾶς τῶν γνωστῶν ἀρχῶν (*Μέθοδοι*, § 346, *πέμπτη ἀρχή*).

Πρόβλημα 597—III

1681. **Ἐὰν ἡ σταθερὰ γωνία MON = 180° — $\widehat{B}$ στρέφεται περὶ τυχὸν σημεῖον O τῆς AΓ (σχ. 1084), διὰ ποίαν θέσιν αὐτῆς τὸ τρίγωνον γίνεται ἐλάχιστον ;**

Διὰ OM, ON καθέτους ἐπὶ τὰς BA, BΓ. Ἐπειδὴ διὰ τυχοῦσαν ἄλλην θέσιν M'ON' τῆς γωνίας, θὰ εἶναι

$$\text{πλαγία } OM' > \text{καθέτου } OM$$

καὶ

$$ON' > ON.$$

Πρόβλημα 597—IV

1682. **Ἐκ σημείου O ἐπὶ τῆς βάσεως τριγώνου τυχόντος, φέρομεν παραλλήλους OM, ON, πρὸς δοθείσας διευθύνσεις καὶ περατουμένας εἰς**

---

90. Σημ. μετ. Ἐκ γεωμετρικῆς ἐποπτείας. Βλ. καὶ σελ. 188 Σημ.

τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ Ο τὸ τρίγωνον ΜΟΝ γίνεται μέγιστον;

Διὰ τὸ μέσον Ο τῆς βάσεως.

Πρόβλημα 597—V

1682 α. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΒΓ τῶν πλευρῶν γωνίας ΧΑΥ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἔχῃ δοθὲν ἐμβαδὸν k^2 ἡ δὲ εὐθεῖα ΒΓ νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρέπει νὰ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἔστω, πράγματι, τυχὸν ἄλλο τρίγωνον ΜΑΝ ἔχον τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν k^2 ἀλλὰ μὲ ἀνίσους πλευρὰς ΑΜ, ΑΝ. Θὰ ἔχωμεν

$$ΒΓ^2 = β^2 + γ^2 - 2βγ \text{ συν } Α \qquad (β = γ)$$

$$ΜΝ^2 = μ^2 + ν^2 - 2μν \text{ συν } Α. \qquad (μ = ΑΜ,\ ν = ΑΝ)$$

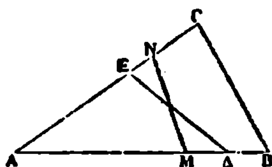
Ἐπειδὴ $βγ = μν = \frac{2k^2}{\text{ημ } Α}$, ἡ διαφορὰ $ΒΓ^2 - ΜΝ^2$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀθροισμάτων $β^2 + γ^2$ καὶ $μ^2 + ν^2$. Εἶναι δὲ τὸ πρῶτον ἄθροισμα μικρότερον τοῦ δευτέρου, συμφώνως πρὸς τὴν *τετάρτην ἀρχὴν* τῆς § 346. Ἐπομένως

$$ΒΓ < ΜΝ.$$

Πρόβλημα 597—VI

1682 β. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα διὰ τῆς βραχυτέρας εὐθείας.

Ἔστω $(ΑΒΓ) = 2k^2$ καὶ ΑΜΝ, ΑΔΕ δύο τρίγωνα μὲ τὸ ἐμβαδὸν k^2 ἕκαστον ἀλλ' ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον εἶναι ἰσοσκελές. Λέγω ὅτι ἡ βάσις ΜΝ τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.



Σχ. 1084.α

Ἂς θέσωμεν, πράγματι, ΑΜ = μ, ΑΝ = ν = μ, ΑΔ = δ, ΑΕ = ε. Θὰ ἔχωμεν, ὡς καὶ προηγουμένως:

$$ΜΝ^2 = μ^2 + ν^2 - 2μν \text{ συν } Α \qquad (1)$$

$$ΔΕ^2 = δ^2 + ε^2 - 2δε \text{ συν } Α \qquad (2)$$

ὅπου καὶ πάλιν μν = δε. Ἐπειδὴ δὲ

$$μ^2 + ν^2 < δ^2 + ε^2 \qquad (\S\ 346)$$

θὰ εἶναι καὶ $ΜΝ < ΔΕ.$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΜΝ, παρατηροῦμεν ὅτι

$$\frac{ΑΜ \,.\, ΑΝ \,.\, \text{ημ } Α}{2} = k^2, \quad μ^2 = \frac{2k^2}{\text{ημ } Α}$$

καὶ

$$ΜΝ^2 = 2ΑΜ^2 - 2ΑΜ^2 \text{ συν } Α = 2μ^2 (1 - \text{συν } Α) = 4μ^2 \text{ ημ}^2 \left(\frac{Α}{2}\right)$$

δηλ.

$$ΜΝ^2 = \frac{8k^2 \text{ ημ}^2 \left(\frac{Α}{2}\right)}{\text{ημ } Α} = 4k^2 \text{ εφ } \left(\frac{Α}{2}\right). \qquad (1)$$

1682 γ. Παρατήρησις. Εἰς ἑκάστην γωνίαν τοῦ τριγώνου ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ἐλαχίστη, ὡς ἀνωτέρω, εὐθεῖα· ἡ μικροτέρα δὲ αὐτῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μικροτέραν γωνίαν, ὡς προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς σχέσεως (1).

1682 δ. Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω ζήτημα εὑρίσκεται εἰς τὸν I τόμον τῆς Ἀλγέβρας τοῦ Laurent; σ. 181· ἀναφέρεται ἐπίσης καὶ εἰς *Int. d. Math.*, 1902, σ. 33, n° 2275 (Wargny).

Πρόβλημα 598

1683. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν περίμετρον, ποῖον τὸ μεγίστης ἐπιφανείας;

(*Μέθοδοι*, § 343).

Πρόβλημα 599

1684. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, ποῖον τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου;

(*Μέθοδοι*, § 344).

Πρόβλημα 600

1685. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαστάσεων εἶναι σταθερόν, ποῖον τὸ μεγίστης ἐπιφανείας;

(*Μέθοδοι*, § 345).

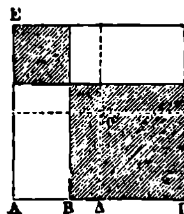
Πρόβλημα 601

1686. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, ποῖον τὸ ἔχον ἐλάχιστον ἄθροισμα τετραγώνων τῶν διαστάσεων αὐτοῦ;

(*Μέθοδοι*, § 346).

Πρόβλημα 601—I

1687. Εὐθεῖα ΑΓ, μήκους α, διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα καὶ ἐπὶ ἑκάστου αὐτῶν κατασκευάζομεν τετράγωνα. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἀθροίσματος z^2 τῶν τετραγώνων τούτων.



Σχ. 1085.

Ἔστω $AB = x$, $B\Gamma = y$, $x + y = \alpha$.

Θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^2 = x^2 + y^2 + 2xy, \quad z^2 = x^2 + y^2 = \alpha^2 - 2xy.$$

Τὸ μέγιστον συνεπῶς τοῦ ἀθροίσματος z^2 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐλάχιστον τοῦ γινομένου xy, δηλ. διὰ x ἢ y ἴσον πρὸς τὸ μηδὲν καὶ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς α^2. Τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἰδίου ἀθροίσματος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου xy· τοῦτο δὲ λαμβάνεται διὰ

$$x = y = \frac{\alpha}{2}. \qquad (\S\ 343)$$

Ὥστε
$$\max\,(x^2 + y^2) = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Κατὰ ταῦτα, ὅταν τὸ σημεῖον διαιρέσεως Β εὑρίσκεται εἰς τὸ

μέσον τῆς εὐθείας ΑΓ, τὸ ἄθροισμα z^2 γίνεται ἐλάχιστον καὶ ἴσον πρὸς $\frac{\alpha^2}{2}$. Ἀπὸ τῆς θέσεως αὐτῆς καὶ ὕστερον αὐξάνει καὶ διὰ $B \equiv \Gamma$ ἢ Α λαμβάνει τὴν μεγίστην αὐτοῦ τιμὴν α^2.

Παρατηρήσεις. 1) Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ σημεῖον διαιρέσεως Β εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΓ, θὰ εἴχομεν

$$\alpha^2 = x^2 + y^2 - 2xy,$$
$$z^2 = x^2 + y^2 = \alpha^2 + 2xy,$$

καὶ τὸ ἄθροισμα z^2 θὰ ηὔξανεν εἰς ἄπειρον μετὰ τῶν x καὶ y.

2) Φθάνομεν ταχύτερον εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ *ἐλαχίστου* τοῦ ἀθροίσματος δύο τετραγώνων, στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς ἑπομένης γνωστῆς ἀρχῆς: *Τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος δύο τετραγώνων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν εἶναι σταθερόν, λαμβάνεται διὰ τετράγωνα ἴσα.*

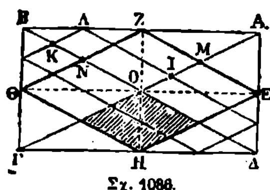
Ἔστωσαν, ἄλλωστε, $x = \frac{\alpha}{2} + z$, $y = \frac{\alpha}{2} - z$ αἱ πλευραὶ τῶν δύο τετραγώνων· τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶναι

$$x^2 + y^2 = 2\left(\frac{\alpha^2}{4} + z^2\right),$$

καὶ τὸ ἐλάχιστον αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς $z = 0$ δηλ. διὰ $x = y = \frac{\alpha}{2}$.

Πρόβλημα 602

1688. Ποῖον τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθὲν ὀρθογώνιον παραλληλογράμμων καὶ ἐχόντων τὰς πλευρὰς παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους αὐτοῦ;

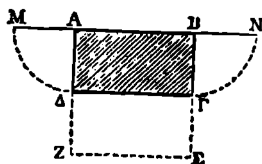


Σχ. 1086.

Ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὸ τέταρτον ΟΙΛΚ τοῦ τυχόντος ἐξ αὐτῶν. Κατὰ τὰς §§ 349 καὶ 351, τὸ μέγιστον τοῦ μερικοῦ τούτου παραλληλογράμμου λαμβάνεται διὰ $\Lambda \equiv Z \equiv$ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ. Εἶναι λοιπὸν τὸ μέγιστον, ἐκ τῶν ἐγγραφομένων παραλληλογράμμων εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ὁ ρόμβος ΕΖΘΗ.

Πρόβλημα 603

1689. **Νὰ κατασκευασθῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον ἐκ τῶν ἐχόντων δεδομένον ἄθροισμα τριῶν πλευρῶν.**



Σχ. 1087.

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο καὶ

$$\Delta A + AB + B\Gamma = MN = \lambda.$$

Διπλασιάζοντες τὸ ὀρθογώνιον κατὰ τὸ ΑΒΕΖ, παρατηροῦμεν ὅτι

$$2(AB + BE) = 2\lambda$$

ἢ

$$AB + BE = \lambda.$$

Ἀγόμεθα οὕτω εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ μεγίστου ὀρθογωνίου ΑΒΕΖ ἐκ τῶν ἐχόντων ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν πλευρῶν ὡρισμένον· γνωρίζομεν δὲ ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ *τετράγωνον* μὲ πλευρὰν

$$AB = BE = \frac{\lambda}{2}.$$

Ἐπομένως, τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἐκεῖνο δι' ὅ:

$$AB = \frac{\lambda}{2} \quad \text{καὶ} \quad B\Gamma = A\Delta = \frac{BE}{2} = \frac{\lambda}{4}.$$

Ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι ἴση πρὸς $\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda^2}{8}$.

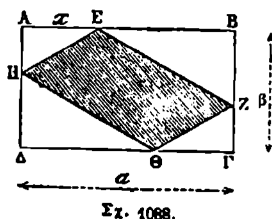
Παρατήρησις. 1) Ἐὰν θέσωμεν $B\Gamma = x$ καὶ $AB = \lambda - 2x$, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι $E = x(\lambda - 2x)$ καὶ τὸ μέγιστον αὐτοῦ λαμβάνεται διὰ $x = \frac{\lambda}{4}$. Ἐπομένως

$$\max . E = \frac{\lambda}{4}\left(\lambda - \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda^2}{8}.$$

2) Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν καὶ τοῦ ἑπομένου.

Πρόβλημα 604

1690. Ἐπὶ τῆς περιμέτρου δοθέντος ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ καὶ ἀπὸ τῶν κορυφῶν του ἀρχόμενοι, λαμβάνομεν τμήματα $AE = BZ = \Gamma\Theta = \Delta H = x$, κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν διαγραφῆς τῆς περιμέτρου. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μήκους x τὸ ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον ΕΗΘΖ γίνεται ἐλάχιστον;



Σχ. 1088.

Τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἐγγεγραμμένου παραλληλογράμμου λαμβάνεται ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων τριγώνων τοῦ σχήματος εἶναι μέγιστον.

Τὰ δύο ἴσα τρίγωνα ΕΒΖ, ΘΔΗ ἔχουν ἄθροισμα ἐμβαδῶν $x(\alpha - x)$ τὰ δὲ δύο ἄλλα $x(\beta - x)$. Ἀγόμεθα ἑπομένως εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως

$$y = (\alpha + \beta - 2x)x$$

ἢ τῆς

$$z = (\alpha + \beta - 2x)(2x).$$

Ἐπειδὴ $(\alpha + \beta - 2x) + (2x) = \alpha + \beta =$ σταθερὸν μῆκος, τὸ μέγιστον τῆς ποσότητος z λαμβάνεται διὰ $\alpha + \beta - 2x = 2x$, δηλ. διὰ $x = \frac{\alpha + \beta}{4}$, ὁπότε

$$\max . z = \left(\alpha + \beta - 2\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right) = \frac{(\alpha+\beta)^2}{8}$$

καὶ ἑπομένως

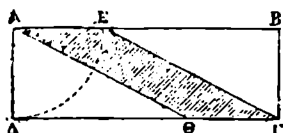
$$\min . (E H \Theta Z) = (AB\Gamma\Delta) - z = \alpha\beta - \frac{(\alpha+\beta)^2}{8} = \frac{4\alpha\beta - (\alpha-\beta)^2}{8}.$$

1690 α. Διερεύνησις. Ὑπάρχουν τρεῖς περιπτώσεις πρὸς ἐξέτασιν:

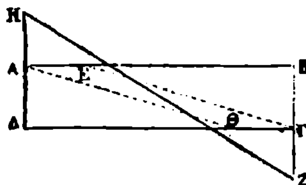
1) $$\frac{\alpha+\beta}{4} < \beta < \alpha.$$

Αἱ τέσσαρες κορυφαὶ τοῦ ἐγγεραμμένου ἐλαχίστου παραλληλογράμμου εὑρίσκονται, ἀνὰ μία, μεταξὺ διαδοχικῶν κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου

2) $$\frac{\alpha+\beta}{4} = \beta \quad \text{ἢ} \quad 3\beta = \alpha.$$



Σχ. 1089.



Σχ. 1090.

Δύο τῶν κορυφῶν τοῦ ἐλαχίστου παραλληλογράμμου συμπίπτουν πρὸς δύο ἀπέναντι κορυφὰς τοῦ ὀρθογωνίου (Σχ. 1089).

3) $$\frac{\alpha+\beta}{4} > \beta.$$

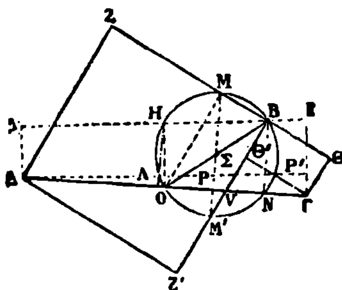
Ἀπὸ γεωμετρικῆς ἀπόψεως, τὸ ἐλάχιστον λαμβάνεται πάλιν διὰ

$$x = \text{ΑΕ} = \text{ΓΘ} = \beta. \qquad (\text{Σχ. } 1090)$$

Πρόβλημα 604—Ι

1691. Δίδονται εὐθεῖα ΑΓ, θέσει καὶ μεγέθει, ὡς καὶ σημεῖον Β. Ἐκ τοῦ Β φέρομεν τέμνουσαν τυχοῦσαν τῆς εὐθείας καὶ ἐκ τῶν Α, Γ τὰς καθέτους ΑΔ, ΓΕ ἐπ' αὐτήν.

Ποῖον τὸ μέγιστον ἐκ τῶν οὕτω σχηματιζομένων τραπεζίων;



Σχ. 1091

Ἔστω ΔΕ τυχοῦσα τέμνουσα καὶ ΟΗ ἡ ἐκ τοῦ μέσου Ο τῆς ΑΓ κάθετος ἐπ' αὐτήν. Ἡ εὐθεῖα ΟΗ θὰ εἶναι ἡ μέση βάσις τοῦ τραπεζίου ΓΕΔΑ καὶ ἂν ἐκ τοῦ σημείου Η φέρωμεν τὴν κάθετον ΗΛ ἐπὶ τὴν ΑΓ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου θὰ εἶναι (§ 1566).

$$\text{ΟΗ}.\text{ΔΕ} \qquad \text{ΑΓ}.\text{ΛΗ},$$

ὡς ἀμέσως προκύπτει ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΗΛ, ΑΓΡ′ καὶ τῆς ἀναλογίας

$$\frac{ΟΗ}{ΗΛ} = \frac{ΑΓ}{ΔΕ}, \text{ ἐξ ἧς } ΟΗ . ΔΕ = ΑΓ . ΗΛ.$$

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι σταθερά, αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου ἐξαρτῶνται ἐξ ἐκείνων τοῦ μήκους ΗΛ. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Η ἀνήκει προφανῶς εἰς τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΟΒ· εἶναι ἑπομένως τὸ μέγιστον τῆς ΗΛ ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς καθέτου ΜΣΡ, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου Σ τῆς περιφερείας ΟΒ.

Τὸ σημεῖον Β εἶναι ὡρισμένον θέσει· ἄρα εἶναι ὡρισμένη καὶ ἡ ἀπόστασις ΒΝ = β, ὡς καὶ ἡ διάμετρος ΟΒ = α· καὶ ἐπειδὴ

$$ΜΣΡ = ΣΡ + ΣΜ = \frac{β}{2} + \frac{α}{2} = \frac{α+β}{2},$$

ἕπεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου τραπεζίου ΑΖΘΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$(α+β) . δ,$$

ὅπου 2δ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΓ.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν κάθετον ΡΜ′ ἀντιστοιχεῖ ἓν δεύτερον μέγιστον· ἡ ΒΜ′ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΑΓ μεταξὺ Α καὶ Γ καὶ τὸ τραπέζιον ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς διαφορᾶς τῶν τριγώνων ΑΥΖ′ καὶ ΓΥΘ′. Ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι ἴση πρὸς

$$ΑΓ . ΡΜ' = 2δ\left(\frac{α-β}{2}\right) = δ(α-β).$$

Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν καὶ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα:

Διὰ σημείου Β περιφερείας δοθείσης φέρομεν τυχοῦσαν χορδήν, ὡς καὶ καθέτους ἐπ᾽ αὐτὴν ἐκ τῶν ἄκρων σταθερᾶς διαμέτρου ΑΓ. Διὰ ποίαν θέσιν τῆς χορδῆς ἡ διαφορὰ τῶν σχηματιζομένων τριγώνων εἶναι μεγίστη;

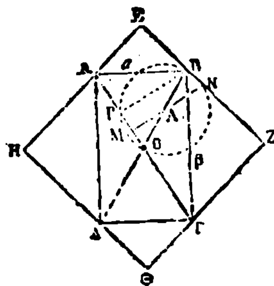
Πρόβλημα 605

1692. **Εἰς ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ νὰ περιγραφῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου.**

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον (§ 1691).

Ἐπὶ τῆς ΟΒ ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν καὶ φέρομεν κάθετον ΜΛΝ ἐπὶ τὴν ΑΓ, ὡς καὶ τὰς καθέτους ΑΕ, ΓΖ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΝ. Ἡ εὐθεῖα ΕΒΝΖ εἶναι ἡ μία τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Πράγματι, τὸ τραπέζιον ΑΕΖΓ εἶναι κατὰ τὰ προηγούμενα μέγιστον καὶ μετὰ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτοῦ ΑΗΘΓ, πρὸς τὸ κέντρον Ο τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου, συναποτελοῦν ἓν ὀρθογώνιον περιγεγραμμένον εἰς τὸ ΑΒΓΔ καὶ μεγίστου ἐμβαδοῦ.



Σχ. 1692.

Ἐὰν α, β εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ἀρχικοῦ ὀρθογωνίου, θὰ ἔχωμεν

$$ΑΓ = \sqrt{α^2 + β^2} = δ, \quad ΒΛ = \frac{δ}{4}$$

καὶ

$$(ΑΒΓΔ) = αβ = ΒΡ \,.\, δ, \quad ΒΡ = \frac{αβ}{δ}.$$

Ἀφ' ἑτέρου, εἶναι

$$ΜΝ = ΜΛ + ΛΝ = \frac{ΒΡ}{2} + ΛΒ = \frac{αβ}{2δ} + \frac{δ}{4}.$$

Καὶ ἐπειδὴ (ΑΕΖΓ) = ΑΓ . ΜΝ καὶ (ΕΖΘΗ) = 2 (ΑΕΖΓ), ἕπεται

$$(ΕΖΘΗ) = 2δ \,.\left(\frac{αβ}{2δ} + \frac{δ}{4}\right) = \frac{2αβ + δ^2}{2} = \frac{(α+β)^2}{2}.$$

Ἀντιστρόφως. *Μία ὀρθὴ γωνία* ΒΑΔ (σχ. 1092) *στρέφεται περὶ τὴν σταθερὰν κορυφήν της* Α, *ἔστωσαν δὲ* Β, Δ *αἱ τομαὶ τῶν πλευρῶν της καὶ δύο σταθερῶν παραλλήλων εὐθειῶν* ΕΖ *καὶ* ΗΘ. *Διὰ ποίαν θέσιν τῆς γωνίας τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον* ΒΑΔ *γίνεται ἐλάχιστον;*

Ἔστω ΑΕΗ ἡ κάθετος ἐπὶ τὰς παραλλήλους. Θὰ πρέπει νὰ λάβωμεν ΕΒ = ΕΑ, ὁπότε καὶ ΗΔ = ΗΑ.

Σχήματα ἐγγεγραμμένα ἢ περιγεγραμμένα εἰς περιφέρειαν

Πρόβλημα 606

1693. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον.

1) Ἡ κατασκευὴ γίνεται δι' ἐφαρμογῆς τῆς τρίτης ἀρχῆς (§ 345).

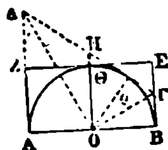
2) Διὰ τῆς ἐφαπτομένης (§ 350), ἀγόμεθα εἰς πολὺ ἁπλῆν κατασκευήν.

3) Καὶ ἡ ἀπ' εὐθείας σπουδὴ εὐκόλως διεξάγεται.

Πρόβλημα 607

1694. Εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β διαμέτρου ἡμιπεριφερείας φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς καὶ θεωροῦμεν μίαν μεταβλητὴν τρίτην ἐφαπτομένην ΔΓ περατουμένην εἰς τὰς δύο πρώτας.

Ποῖον τὸ ἐλάχιστον ἐκ τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν τραπεζίων ΑΒΓΔ;



Σχ. 1093.

Ἡ ἀκτὶς εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΓ, ΟΔ διαιροῦν τὸ τραπέζιον εἰς τέσσαρα τρίγωνα ἴσα ἀνὰ δύο· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΟΔ τὸ ἥμισυ τοῦ τραπεζίου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τελευταίου ἴσον πρὸς ρ . ΔΓ. Γίνεται, ἑπομένως, τὸ τραπέζιον ἐλάχιστον διὰ τὴν ἐλαχίστην ἐφαπτομένην ΓΔ, δηλ. διὰ θέσιν αὐτῆς παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ, ὁπότε τὸ τραπέζιον ἀποβαίνει τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν τετραγώνου.

Παρατηρήσεις. 1) Συμφώνως πρὸς μίαν γνωστὴν ἄσκησιν (§ 1566),

διὰ τὸ ἐλάχιστον τῆς ἐφαπτομένης ΓΔ πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ μῆκος ΟΗ νὰ εἶναι ἐλάχιστον, δηλ. ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

2) *Ἐκ τῆς σπουδῆς διὰ τὴν ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου τραπεζίου, ἕπεται εὐκόλως καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστης περιμέτρου τοῦ ἰδίου σχήματος.*

Πράγματι,

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{ρ}{2}(ΑΔ + ΔΓ + ΓΒ), \quad (ΑΖΕΒ) = \frac{ρ}{2}(ΑΖ + ΖΕ + ΕΒ).$$

Ἀλλ' εἶναι, ὡς ἐδείχθη

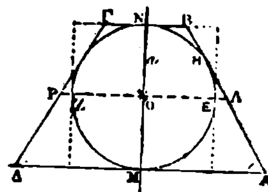
$$(ΑΖΕΒ) < (ΑΒΓΔ)\cdot$$

ἄρα περίμετρος $(ΑΖ + ΖΕ + ΕΒ) <$ περιμέτρου $(ΑΔ + ΔΓ + ΓΒ)$.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὰ ζητήματα τῶν §§ 1695, 1699, 1707.

Θεώρημα 607—Ι

1695. **Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου περιγεγραμμένου εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν.**



Σχ. 1094.

Καὶ τὸ ζήτημα τοῦτο εἰς τὸ προηγούμενον ἀνάγεται. Δυνάμεθα δὲ νὰ ἐπιληφθῶμεν αὐτοῦ κατὰ τὸν ἑπόμενον πολὺ ἁπλοῦν τρόπον:

Ἡ διὰ τοῦ κέντρου παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις ΛΡ εἶναι ἡ μέση βάσις τοῦ τραπεζίου· ἑπομένως

$$Ε = (ΑΒΓΔ) = ΜΝ \,.\, ΛΡ.$$

Ἐπειδὴ ἡ ΛΡ εἶναι ἡ μόνη μεταβλητὴ καὶ τὸ μῆκος αὐτῆς αὐξάνει μετὰ τῆς κλίσεως τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐλάχιστον αὐτοῦ λαμβάνεται διὰ $ΛΡ = 2α$, δηλ. ὅταν τὸ τραπέζιον ἀποβῇ τετράγωνον. Θὰ εἶναι τότε:

$$\min. Ε = 4α^2.$$

Πρόβλημα 607—ΙΙ

1695 α. **Νὰ κατασκευασθῇ περιγράψιμον ἰσοσκελὲς τραπέζιον ἐκ τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας καὶ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.**

Ἔστω 8τ ἡ περίμετρος. Θὰ ἔχωμεν (σχ. 1094):

$$ΑΗ = ΑΜ, \quad ΒΗ = ΒΝ$$

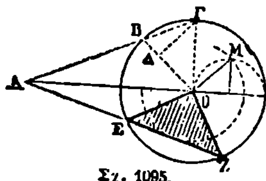
$$ΑΜ + ΒΝ = ΑΒ = \frac{8τ}{4} = 2τ.$$

Ἑπομένως, $\quad ΟΛ =$ μέση βάσις $= τ.$

Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ ληφθῇ ἡ ΟΛ ἴση πρὸς τὸ ὄγδοον τῆς περιμέτρου καὶ ἐκ τοῦ Λ νὰ ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ἐπὶ τὴν περιφέρειαν.

Πρόβλημα 607—III

1696. Ἐκ σημείου Α ἐξωτερικοῦ δοθείσης περιφερείας (Ο), νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτῆς ΑΒΓ τοιαύτη, ὥστε τὸ τρίγωνον ΒΟΓ νὰ εἶναι τὸ μέγιστον.



Σχ. 1095.

Ἂν ΓΔ τὸ ἐπὶ τὴν ΟΒ ὕψος τοῦ τριγώνου ΒΟΓ, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι

$$E = \frac{OB \, . \, \Gamma\Delta}{2} = \rho \, . \, \frac{\Gamma\Delta}{2} \, .$$

Ἐπειδὴ $\Gamma\Delta \leqslant \rho$, τὸ μέγιστον τοῦ Ε λαμβάνεται διὰ γωνίαν $BO\Gamma = 90^\circ$. Ἐπειδὴ τότε $\Gamma\Delta = \rho$.

Ἂν ΕΟΖ εἶναι τὸ μέγιστον τοῦτο τρίγωνον, ἡ πλευρὰ ΕΖ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν τετραγώνου, ἡ δὲ ζητουμένη τέμνουσα εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας

μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα $\frac{\rho\sqrt{2}}{2}$.

Πρόβλημα 607—IV

1697. Διὰ σημείου Α, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓ περιφερείας (Ο) τοιαύτη, ὥστε, ἂν ἀχθῇ καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΕ κάθετος ἐπὶ τὴν τέμνουσαν, τὸ τετράπλευρον ΒΟΓΕ νὰ εἶναι τὸ μέγιστον.

Ἐπειδή: $(BO\Gamma E) = \frac{OE \, . \, B\Gamma}{2} = \frac{\rho \, . \, B\Gamma}{2}$,

ἀρκεῖ ἡ ΒΓ νὰ ἀποβῇ ἡ μεγίστη χορδή. Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ φέρωμεν διὰ τοῦ Α διάμετρον τῆς περιφερείας, ὁπότε

$$\max . \, (BO\Gamma E) = \rho^2 .$$

Πρόβλημα 607—V

1697 α. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς ἐπιφανείας τετραπλεύρου ὀρθοδιαγωνίου, ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν (Ο) καὶ διατηροῦντος σταθερὸν καὶ ἐσωτερικὸν τῆς (Ο) τὸ σημεῖον τομῆς Κ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

Ἔστωσαν 2α, 2β αἱ διαγώνιοι, δ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ σημείου Κ καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι $2\alpha\beta$ καί, κατὰ ἓν *θεώρημα τοῦ Ἀρχιμήδους*, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων αὐτοῦ θὰ εἶναι (§ 1325)

$$4\alpha^2 + 4\beta^2 = 8\rho^2 - 4\delta^2 .$$

Ἄρα $$\alpha^2 + \beta^2 = 2\rho^2 - \delta^2 ,$$

καὶ κατὰ τὴν τρίτην ἀρχὴν (§ 345), τὸ γινόμενον αβ καθίσταται μέγιστον ὅταν

$$\alpha = \beta$$

καὶ ἐλάχιστον ὅταν αἱ χορδαὶ αὗται ἔχουν διαφορὰν ἀπ' ἀλλήλων μεγίστην.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, αἱ διαγώνιοι πρέπει νὰ εἶναι ἴσον

κεκλιμέναι πρὸς τὴν διάμετρον ΟΚ, τὸ ἥμισυ δὲ τοῦ κοινοῦ των μήκους θὰ εἶναι

$$\alpha = \beta = \sqrt{\rho^2 - \frac{\delta^2}{2}},$$

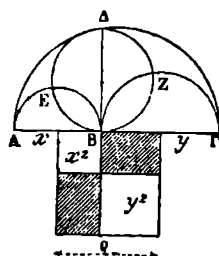
ὁπότε $\max.$ ἐμβαδοῦ $= 2\alpha\beta = 2\rho^2 - \delta^2$.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἡ μία τῶν διαγωνίων θὰ εἶναι ἡ διάμετρος διὰ τοῦ Κ· τῆς ἄλλης τὸ μῆκος θὰ εἶναι $2\beta = 2\sqrt{\rho^2 - \delta^2}$. Ἑπομένως,

$\min.$ ἐμβαδοῦ $= 2\alpha\beta = 2\rho\sqrt{\rho^2 - \delta^2}$ (βλ. § 1700).

Πρόβλημα 608

1698. Ἐπὶ δύο τμημάτων ΑΒ, ΒΓ διαμέτρου ἡμιπεριφερείας ΑΔΓ γράφομεν ἄλλας ΑΕΒ, ΒΖΓ, ἐσωτερικὰς τῆς πρώτης. Ποῖον τὸ μέγιστον τοῦ μεταξὺ τῶν ἡμιπεριφερειῶν χωρίου ΑΕΒΖΓΔΑ;



Σχ. 1090.

1ος Τρόπος. Ἐπειδὴ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἡμικυκλίων εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν ἀντιστοίχων ἀκτίνων, ἀρκεῖ νὰ συγκρίνωμεν τὰ τετράγωνα x^2, y^2, ρ^2 (Σχ. 1096).

Τὸ μέγιστον τῆς διαφορᾶς $\rho^2 - (x^2 + y^2)$ λαμβάνεται διὰ τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος $x^2 + y^2$· καὶ ἐπειδὴ $x + y = \rho$, τὸ τελευταῖον τοῦτο συμβαίνει διὰ $x = y$ (§ 1687).

Θὰ εἶναι τότε

$$x^2 + y^2 = \frac{\rho^2}{2}$$

καὶ ἐπομένως

$$\text{mim. } E = \rho^2 - \frac{\rho^2}{2} = \frac{\rho^2}{2}.$$

Εἶναι δηλ. τὸ ἐλάχιστον χωρίον Ε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἡμικυκλίων μὲ διαμέτρους ἕκαστον τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου ΑΓ.

2ος Τρόπος. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ θεωρηθὲν καμπυλόγραμμον χωρίον, ἡ *ἄρβηλος τοῦ Ἀρχιμήδους,* εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον τὴν κάθετον ΒΔ (§ 1579). Γίνεται ἄρα μέγιστον διὰ ΒΔ $= \rho$, ἢ διὰ Β συμπῖπτον πρὸς τὸ κέντρον τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΓ.

Πρόβλημα 608—I

1699. Νὰ περιγραφῇ εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν ὁ ἐλάχιστος ρόμβος.

1) Ἀρκεῖ τὸ τέταρτον ΑΟΓ τοῦ ρόμβου τούτου νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον καὶ τοῦτο συμβαίνει ὅταν ἡ ἐφαπτομένη ΑΒΓ διαιρῆται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Β (§ 367, *Μέθοδοι*).

Εἶναι ἐπομένως ὁ ἐλάχιστος ρόμβος τὸ περιγεγραμμένον τετράγωνον.

2) Θὰ ἠδυνάμεθα ἐπίσης νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν

τοῦ τετάρτου τοῦ ρόμβου εἶναι ἴσον πρὸς $ΔΖ . \frac{ρ}{2}$ καὶ γίνεται συνεπῶς ἐλάχιστον ὅταν καὶ τὸ ΔΖ γίνῃ ἐλάχιστον.

Ἀλλ' εἶναι $ΔΖ = ΔΕ + ΕΖ$

καὶ $ΔΕ . ΕΖ = ρ^2$.

Τὸ ἐλάχιστον κατὰ συνέπειαν μῆκος ΔΖ λαμβάνεται διὰ $ΔΕ = ΕΖ$.

Σχ. 1097.

Πρόβλημα 608—II

1699 α. Νὰ περιγραφῇ εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν ρόμβος δοθέντος ἐμβαδοῦ $2 k^2$.

Θὰ ἔχωμεν $ΟΕ . ΔΖ = k^2$ καὶ $ΔΖ = \frac{k^2}{ρ}$.

Εἶναι γνωστὸν ἑπομένως τὸ τελευταῖον τοῦτο μῆκος καὶ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑπόμενον:

Πρόβλημα 608—III

1699 β. Νὰ κατασκευασθῇ ρόμβος ἐκ τῆς πλευρᾶς του καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, ἤ, νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὀρθογώνιον ἐκ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους.

1) Διὰ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος δυνάμεθα νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν § 214 ἤ, κατὰ τὴν ἀλγεβρικὴν μέθοδον, νὰ ὁρίσωμεν τὰ τμήματα ΔΕ, ΕΖ καὶ ἐξ αὐτῶν τὰ ΟΔ καὶ ΟΖ. Πράγματι

$$ΔΕ + ΕΖ = ΔΖ = \frac{k^2}{ρ}$$

καὶ

$$ΔΕ . ΕΖ = k^2.$$

2) Ἡ λύσις τοῦ *προβλήματος τοῦ Gerbert* (βλ. ἐπμ., § 1722), ὁρίζει ἀπ' εὐθείας τὰ μήκη ΟΔ καὶ ΟΖ.

Πρόβλημα 609

1700. Δίδονται περιφέρεια (Ο) καὶ σημεῖον Α. Ζητεῖται νὰ ἀχθοῦν διὰ τοῦ Α δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον, μὲ διαγωνίους τὰς ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων χορδὰς τῆς περιφερείας, νὰ ἔχῃ τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν (βλ. § 1697 α).

Ἔστω λελυμένον τὸ πρόβλημα καὶ ΒΔΓΕ τὸ τετράπλευρον.

Σχ. 1098.

Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{ΒΓ . ΔΕ}{2}$ ἢ $2ΒΘ.ΖΕ$ καὶ τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου τούτου λαμβάνεται ταυτοχρόνως μετὰ τοῦ μεγίστου τοῦ τετραγώνου τοῦ $ΒΘ^2 . ΖΕ^2$ ἢ τοῦ $(ρ^2 - ΟΘ^2)(ρ^2 - ΟΖ^2)$.

'Επειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραγόντων τοῦ τελευταίου τούτου γινομένου εἶναι

$$2\rho^2 - (O\Theta^2 + OZ^2) = 2\rho^2 - \alpha^2,$$

ἀφοῦ $O\Theta^2 + OZ^2 = \alpha^2$, τὸ μέγιστον αὐτοῦ λαμβάνεται ὅταν οἱ παράγοντες αὐτοὶ καταστοῦν ἴσοι, δηλ. ὅταν

$$OZ^2 = O\Theta^2 = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Θὰ πρέπει, λοιπόν, *αἱ χορδαὶ νὰ εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὴν διάμετρον* ΟΑ.

Θὰ ἔχωμεν τότε

$$B\Theta^2 = ZE^2 = \rho^2 - \frac{\alpha^2}{2}$$

καὶ ἑπομένως

$$(B\Delta\Gamma E) = 2 . B\Theta . ZE = 2 . B\Theta^2 = 2\rho^2 - \alpha^2.$$

Παρατήρησις. 'Ανάλογον λύσιν εὑρίσκομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ διαγώνιοι τέμνονται κατὰ τυχοῦσαν σταθερὰν γωνίαν.

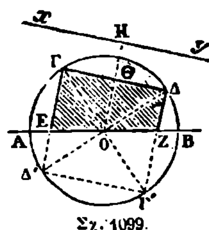
Πρόβλημα 610

1701. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον τὸ μέγιστον τετράπλευρον, ἐκ τῶν ἐχόντων τὴν διάμετρον ὡς μίαν πλευρὰν αὐτῶν.**

Λαμβάνομεν τοῦτο κατὰ τὸν τρόπον, ὅστις ἐξετέθη εἰς τὰς *Μεθόδους*, § 354, θεωροῦντες κατ' ἀρχὰς μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ μεταβλητοῦ τετραπλεύρου ὡς σταθεράν.

Πρόβλημα 610—I

1702. **Δίδονται εὐθεῖα** xy, **περιφέρεια (Ο) καὶ σταθερὰ διάμετρος ΑΒ αὐτῆς. Ἔστω δὲ ΓΔ χορδὴ παράλληλος πρὸς τὴν** xy, **τῆς ὁποίας ἡ καθέτως πρὸς τὴν** xy **προβολὴ ἐπὶ τὴν διάμετρον εἶναι ἡ ΕΖ. Ποῖον τὸ μέγιστον ἐκ τῶν οὕτω ὁριζομένων τραπεζίων ΕΓΔΖ;**



Σχ. 1099.

1ος Τρόπος. Προεκτείνοντες τὰς ΓΕ, ΔΖ, λαμβάνομεν τὸ ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον ΓΔΔ'Γ', διπλάσιον τοῦ τραπεζίου.

Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο γίνεται μέγιστον ὅταν ἀποβῇ τετράγωνον, δηλαδὴ διὰ

$$O\Theta = \frac{\rho\sqrt{2}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \Gamma\Delta = \rho\sqrt{2}.$$

2ος Τρόπος. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΕΓΔΖ εἶναι ἴσον πρὸς $2 . \Gamma\Theta . O\Theta$. 'Επειδὴ δὲ $\Gamma\Theta^2 + \Theta O^2 = \rho^2$, τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου τούτου λαμβάνεται διὰ

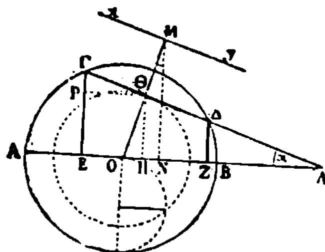
$$O\Theta = \Gamma\Theta = \frac{\rho\sqrt{2}}{2}.$$

Κατασκευή. 'Αρκεῖ νὰ ληφθῇ ἐπὶ τῆς καθέτου ΟΗ τμῆμα $O\Theta = \frac{\rho\sqrt{2}}{2}$.

Πρόβλημα 611

1703. Δίδεται εὐθεῖα xy, περιφέρεια (O) καὶ σταθερὰ διάμετρος AB αὐτῆς. Φέρομεν χορδὴν ΓΔ παράλληλον πρὸς τὴν xy καὶ προβάλλομεν αὐτὴν κατὰ τὸ τμῆμα ΕΖ ἐπὶ τὴν σταθερὰν διάμετρον.

Ποῖον τὸ μέγιστον ἐκ τῶν τραπεζίων ΕΓΔΖ;



Σχ. 1100

Ἔστω λελυμένον τὸ πρόβλημα καὶ ΓΔ ἡ χορδὴ διὰ τὸ μέγιστον τραπέζιον. Ἐκ τοῦ κέντρου Ο φέρομεν κάθετον ΟΜ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν xy, διερχομένην φυσικὰ διὰ τοῦ μέσου Θ τῆς ΓΔ, καθὼς καὶ τὴν κάθετον ΘΗ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ. Θὰ ἔχωμεν :

$$ΘΗ = \frac{ΓΕ + ΔΖ}{2}.$$

Ἡ δὲ ΘΡ, παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν

$$ΕΗ = \frac{ΕΖ}{2}.$$

Ἀφ' ἑτέρου, τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου δίδεται ὑπὸ τοῦ γινομένου ΘΡ.ΘΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΘΗ, ΓΘΡ λαμβάνομεν

$$\frac{ΘΡ}{ΘΓ} = \frac{ΘΗ}{ΘΟ} = \frac{ΜΝ}{ΜΟ} = \text{σταθερὸς λόγος},$$

τὸ γινόμενον ΘΡ.ΘΗ μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ γινομένου ΘΓ.ΘΟ.

Ἀλλ' εἶναι

$$ΘΟ^2 + ΘΓ^2 = ρ^2 = \text{σταθ.},$$

καὶ ἑπομένως τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου ΘΓ.ΘΟ ἀντιστοιχεῖ εἰς

$$ΘΓ = ΘΟ = \frac{ρ\sqrt{2}}{2}.$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΟΜ τμῆμα ΟΘ ἴσον πρὸς $\frac{ρ\sqrt{2}}{2}$, κλπ.

1703 α. Παρατηρήσεις. 1) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΕΖΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς 2ΡΘ.ΘΗ ἢ πρὸς

$$2ΓΘ.ΟΘ.\frac{ΜΝ^2}{ΜΟ^2} = 2\left(\frac{ρ\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{ΜΝ^2}{ΜΟ^2} = ρ^2.\frac{ΜΝ^2}{ΜΟ^2}.$$

2) Ὁ λόγος $\frac{ΜΝ}{ΜΟ}$ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς κλίσεως α τῆς διευθύνσεως

xy πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας α. Ὥστε

$$(\text{ΕΖΔΓ}) = \rho^2 \text{συν}^2\alpha.$$

Διὰ τῆς χρήσεως τῶν τριγωνομετρικῶν τύπων λαμβάνομεν ταχύτερον :

$$\text{ΘΗ} = \text{ΟΘ}\ \text{συν}\,\alpha, \quad \text{ΘΡ} = \text{ΓΘ}\ \text{συν}\,\alpha$$

καὶ

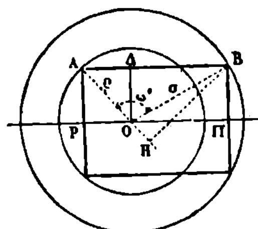
$$(\text{ΕΖΔΓ}) = 2\,\text{ΘΗ}\,.\,\text{ΘΡ} = 2\,.\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{2}\right)^2 \text{συν}^2\,\alpha = \rho^2\,\text{συν}^2\,\alpha.$$

3) Διὰ μίαν ὡρισμένην διεύθυνσιν xy, ἡ χορδὴ ΓΔ διὰ τὸ μέγιστον τραπέζιον συναντᾷ τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς σημεῖον Λ, ἐξαρτώμενον μόνον ἐκ τῆς κλίσεως τῆς xy. Πράγματι,

$$\frac{\text{ΟΛ}}{\text{ΟΘ}} = \frac{1}{\eta\mu\,\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΟΛ} = \frac{\frac{\rho\sqrt{2}}{2}}{\eta\mu\,\alpha} = \frac{\rho\sqrt{2}}{2\,\eta\mu\,\alpha}$$

Πρόβλημα 611—Ι

1704. **Δίδονται δύο περιφέρειαι ὁμόκεντροι καὶ ζητεῖται νὰ ἐγγραφῇ εἰς αὐτὰς ὀρθογώνιον δοθέντος ἐμβαδοῦ k^2 καὶ τοῦ ὁποίου μία τῶν πλευρῶν νὰ εἶναι χορδὴ τῆς μιᾶς περιφερείας καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ χορδὴ τῆς ἑτέρας.**



Σχ. 1101.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστωσαν ρ, σ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο περιφερειῶν. Θεωρήσωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΡΠΒ, ἥμισυ τοῦ ζητουμένου, ἢ καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ τρίγωνον ΑΟΒ.

Θὰ εἶναι

$$(\text{ΑΟΒ}) = \frac{k^2}{4} \quad \text{ἢ} \quad \rho\upsilon = \frac{k^2}{2},$$

ὅπου υ τὸ ἐπὶ τὴν ΟΑ ὕψος τοῦ τριγώνου· ἐπομένως

$$\upsilon = \frac{k^2}{2\rho},$$

καὶ τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι κατασκευάσιμον, ἀφοῦ γνωρίζομεν δύο πλευρὰς αὐτοῦ καὶ τὸ ἐπὶ τὴν μίαν αὐτῶν ὕψος.

Ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ τριγώνου τούτου καθίσταται γνωστὸν τὸ μῆκος ΟΔ κλπ.

Διερεύνησις. Αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀρθογωνίου ἐξαρτῶνται ἐξ ἐκείνων τοῦ τριγώνου ΑΟΒ.

Τὸ ἐμβαδὸν αὐξάνει μετὰ τῆς γωνίας ΑΟΒ = ω καὶ μέχρι τῆς τιμῆς ω = 90°, ὁπότε υ = σ. Ἀπὸ τῆς τιμῆς αὐτῆς καὶ ὕστερον τὸ ἐμβαδὸν ἐλαττοῦται μέχρι μηδενισμοῦ διὰ ω = 180°.

Μέγιστον. Διὰ $υ = σ$, αἱ ἀκτῖνες $ρ$ καὶ $σ$ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ τὸ ὕψος $υ$ λαμβάνει τὴν μεγίστην αὐτοῦ τιμήν. Ἑπομένως

$$\max.(ΑΟΒ) = \frac{1}{2} ρ . σ = \frac{k^2}{4} .$$

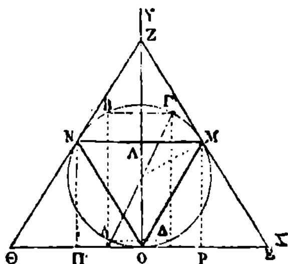
Θὰ εἶναι τότε

$$ΑΒ = \sqrt{ρ^2 + σ^2}, \quad ΟΔ = \frac{k^2}{2\sqrt{ρ^2 + σ^2}} .$$

Πρόβλημα 612

1705. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς περιφέρειαν τὸ μέγιστον τρίγωνον.

1ος Τρόπος. Τὸ τρίγωνον τοῦτο θὰ πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἰσόπλευρον. Ἔστω πράγματι ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ ΑΔ ἡ ἐκ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ. Ἐὰν τὸ τρίγωνον δὲν εἶναι ἰσοσκελές, ἡ εὐθεῖα ΑΔ θὰ εἶναι χορδὴ καὶ ὄχι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ἤ, μὲ ἄλλους λόγους, τὸ τρίγωνον ΟΒΓ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΒΓ.

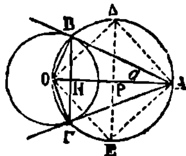


Σχ. 1102.

Θὰ πρέπει λοιπὸν διὰ τὸ μέγιστον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ΑΒ = ΑΓ. Καὶ ἐπειδὴ ὅμοιοι συλλογισμοὶ μᾶς πείθουν ὅτι θὰ πρέπει νὰ εἶναι καὶ ΓΒ = ΓΑ, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον τρίγωνον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἰσόπλευρον.

2ος Τρόπος. Ἔστω ΜΟΝ τὸ μέγιστον τρίγωνον καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΟΡΜΛ. Ἐπειδὴ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ὀρθογωνίων ΟΡΜΛ, τῶν ἐχόντων μίαν τῶν κορυφὴν ἐπὶ τοῦ τόξου ΟΔΜΓ καὶ δύο πλευρὰς ἐπὶ τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ, εἶναι ἐκεῖνο διὰ τὸ ὁποῖον ἡ κορυφὴ Μ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς ἐφαπτομένης ΕΜΖ διαιρουμένης εἰς δύο ἴσα τμήματα ὑπὸ τοῦ σημείου αὐτοῦ (*Μέθοδοι*, § 360), συμπεραίνομεν ὅτι θὰ εἶναι ΕΜ = ΟΕ καὶ ὅτι ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΕΖΘ θὰ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΟΜΝ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ ΕΖΘ θὰ εἶναι ἐπίσης ἰσόπλευρον.

Πρόβλημα 612—I



Σχ. 1103.

1706. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Ο καὶ ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον Ο τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐκ τοῦ Α ἐφαπτόμεναι πρὸς αὐτήν, ΑΒ, ΑΓ, νὰ ὁρίζουν τὸ μέγιστον τρίγωνον ΑΒΓ.

Ποῖον τὸ μέγιστον ἐκ τῶν τετραπλεύρων ΑΒΟΓ ;

1) Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σταθερὰν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΟΑ

καὶ γίνεται κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 1705) μέγιστον ὅταν ἀποβῇ ἰσόπλευρον. Θὰ εἶναι δὲ τότε

$$ΟΗ = \frac{ΟΡ}{2} = \frac{α}{4}.$$

2) Τὸ τετράπλευρον ΑΒΟΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΟ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑποτείνουσα τούτου ΟΑ εἶναι σταθερά, τὸ ἐμβαδόν του γίνεται μέγιστον διὰ τὸ μέγιστον ἐπὶ τὴν ΟΑ ὕψος ΒΗ.

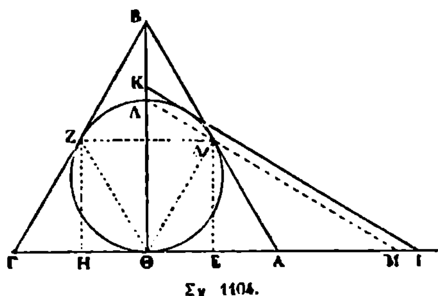
Θὰ πρέπει ἑπομένως διὰ τὸ μέγιστον τῶν τριγώνων ΟΑΒ νὰ εἶναι ΒΗ = α ἢ ΟΔ = ΑΔ. Συνεπῶς, τὸ μέγιστον τῶν τετραπλεύρων ΟΒΑΓ εἶναι τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν (ΑΟ) τετράγωνον.

Πρόβλημα 613

1707. **Νὰ περιγραφῇ εἰς περιφέρειαν τὸ ἐλάχιστον τρίγωνον.**

Τοῦτο εἶναι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

1ος Τρόπος ἀποδείξεως. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς περιγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν πολυγώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, αἱ μεταβολαὶ αὐτοῦ θὰ ἐξαρτῶνται ἐξ ἐκείνων μόνον τῆς περιμέτρου. Καὶ ἐπειδή, ἀκόμη, ἀπεδείξαμεν ὅτι, ἐκ τῶν περιγεγραμμένων εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν τριγώνων μὲ σταθερὰν μίαν πλευράν, τὸ ἐλάχιστον εἶναι τὸ ἰσοσκελὲς (§ 1080), συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι τὸ ἐλάχιστον τῶν περιγεγραμμένων τριγώνων εἶναι τὸ ἔχον τὰς πλευράς του ἀνὰ δύο ἴσας. Δηλαδὴ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον.



Σχ 1104.

2ος Τρόπος ἀποδείξεως. Ἔστω ΒΑΓ τὸ ἐλάχιστον τρίγωνον καὶ ΒΘΑ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ μετὰ τῆς περιφερείας εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ταύτης.

Ἔστω πράγματι ΛΔΜ τυχοῦσα τέμνουσα ἀγομένη διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς ΑΒ. Θὰ ἔχωμεν (§ 367)

$$(ΘΜΛ) > (ΘΑΒ) \quad \text{καὶ} \quad (ΘΙΚ) > (ΘΜΛ),$$

ὅποῦ ΙΚ ἐφαπτομένη παράλληλος τῆς ΜΛ. Κατὰ μείζονα ἑπομένως λόγον

$$(ΘΙΚ) > (ΘΑΒ).$$

καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΙΚ — δι' ἣν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δὲν διχοτομεῖ αὐτὴν — δὲν δύναται νὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ ἐλαχίστου τριγώνου.

Θὰ πρέπει λοιπὸν διὰ τὸ ἐλάχιστον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι

$$ΔΑ = ΔΒ = ΘΑ$$

καὶ τοῦτο ἑπομένως ἰσόπλευρον.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ΔΖΘ ἀντιστοιχεῖ τὸ ἐλάχιστον περιγεγραμμένον ΑΒΓ (§ 1705).

Ἀναλόγους ἰδιότητας ἀνευρίσκομεν καὶ διὰ πολλὰ ἄλλα, προηγουμένως ἐξετασθέντα, προβλήματα.

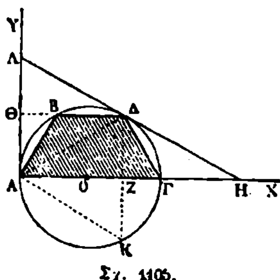
Πρόβλημα 614

1708. Εἰς ἡμικύκλιον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον τραπέζιον.

Ἂν καὶ ἡ γενικὴ λύσις ἐδόθη εἰς τὰς *Μεθόδους* (§ 365), κρίνομεν χρήσιμον νὰ ἐφαρμόσωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν μέθοδον ταύτην ἐπὶ τοῦ προκειμένου προβλήματος.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον, ΑΒΔΓ τὸ ζητούμενον τραπέζιον καὶ Θ ἡ τομὴ τῆς ΔΒ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς Α.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΔΓΖ, ΑΒΘ εἶναι ἴσα, τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΖΔΘ. Τοῦτο δὲ γίνεται, ὡς γνωστόν, μέγιστον ἐὰν ἡ ἐφαπτομένη ΗΔΛ διχοτομῆται ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Δ.

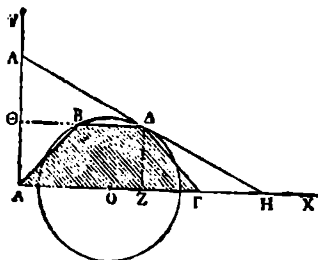


Σχ. 1105.

Ἀφ' ἑτέρου, τὸ ὀρθογώνιον ΑΖΔΘ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΚ· ἐπειδὴ δὲ τὸ μέγιστον τρίγωνον ΑΔΚ εἶναι τὸ ἰσόπλευρον, δι' ὃ ΔΓ = ΑΒ = ρ, συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι τὸ ζητούμενον μέγιστον τραπέζιον εἶναι τὸ ἥμισυ ΑΒΔΓ ἑνὸς κανονικοῦ καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν ἑξαγώνου.

Πρόβλημα 614—I

1709. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Γ ἐπὶ διαμέτρου ἡμιπεριφερείας καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ χορδὴ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τραπέζιον ΑΒΔΓ νὰ εἶναι τὸ μέγιστον.



Σχ. 1106.

Ἐργαζόμεθα ὡς καὶ προηγουμένως· ἡ ἐφαπτομένη ΗΔΛ θὰ πρέπει νὰ διχοτομῆται εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Δ. (Βλ. § 1712 β).

Πρόβλημα 614—II

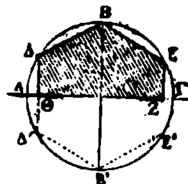
1710. Ἔστω ἡμιπεριφέρεια ΑΒΓ καὶ χορδὴ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΑΓ. Ἐκ τῶν Δ καὶ Ε φέρομεν καθέτους ΔΘ, ΕΖ ἐπὶ τὴν διάμετρον καὶ σχηματίζομεν τὸ πεντάγωνον ΘΔΒΕΖ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Β εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΔΕ.

Διὰ ποίαν θέσιν τῆς χορδῆς ΔΕ τὸ πεντάγωνον τοῦτο γίνεται μέγιστον;

Ὅταν ΒΔ = ΒΕ = ρ. Ἐπειδὴ θὰ εἶναι τότε τὸ πεντάγωνον τὸ ἥμισυ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου.

Παρατήρησις. Ὁμοίως συλλογιζόμενοι εὑρίσκομεν καὶ τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον τραπέζιον εἰς ἡμιπεριφέρειαν—ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι γνωρίζομεν ὅτι τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον εἶναι τὸ κανονικόν.

Ἀντιστρόφως, ἐκ τοῦ μεγίστου ἐγγεγραμμένου τραπεζίου (§ 1708) δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν ὅτι τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον εἶναι τὸ κανονικόν.



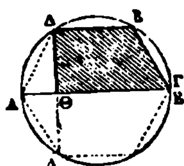
Σχ. 1107

Πρόβλημα 614—III

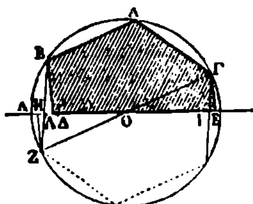
1711. Ἔστωσαν ΒΔ = ΒΕ = ρ δύο χορδαὶ ἡμιπεριφερείας ἀκτῖνος ρ, ΔΘ, ΕΖ αἱ κάθετοι ἐπὶ σταθερὰν διάμετρον ΑΓ (Σχ. 1107). Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ σημείου Β τὸ πεντάγωνον ΘΔΒΕΖ εἶναι τὸ μέγιστον;

Τὸ ζητούμενον μέγιστον λαμβάνεται διὰ Β συμπῖπτον πρὸς τὸ μέσον τῆς ἡμιπεριφερείας· ἐπειδὴ εἶναι τότε τὸ πεντάγωνον ΘΔΒΕΖ (σχ.1107) τὸ ἥμισυ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου.

Τὸ ἐλάχιστον δίδεται ὑπὸ τοῦ πενταγώνου ΘΔΒ (Ε = Γ) Γ τοῦ σχήματος 1108. Θὰ εἶναι τότε τὸ πεντάγωνον τοῦτο τὸ ἥμισυ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου μεῖον τὸ τρίγωνον ΘΑΔ.



Σχ. 1108



Σχ. 1109.

Διὰ πᾶσαν ἄλλην ἐνδιάμεσον θέσιν τῆς κορυφῆς Β (Σχ. 1109), ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πενταγώνου περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο προηγουμένων ἄκρων τιμῶν. Ἐπειδὴ θὰ εἶναι

(ΔΒΑΓΕ) = καν. ἡμιεξάγωνον (ΖΒΑΓ) — (ΗΖΛ) + (ΒΔΛ).

Πρόβλημα 615

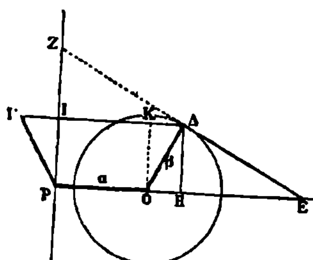
1712. Ποῖον τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τραπεζίων, τῶν ἐχόντων μίαν τῶν βάσεων καὶ τὰς ἴσας πλευρὰς δοθέντων μηκῶν α καὶ β ἀντιστοίχως;

Ἔστω λελυμένον τὸ πρόβλημα καὶ ΓΡΟΔ τὸ μέγιστον τῶν τραπεζίων τούτων.

Τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΙΔΗΡ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Δ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα β. Θὰ εἶναι ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη ΖΔΕ τοῦ σχήματος τοιαύτη, ὥστε τὸ σημεῖον Δ νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΕΖ.

Ἀνατρέχοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς § 311, γνωρίζομεν ὅτι, ὅταν $\alpha > \rho = \beta$, τὸ μῆκος ΟΕ παρέχεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$OE = x = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + 2\beta^2}.$$



Σχ. 1110.

1712 α. Ἐμβαδόν. Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ μεγίστου τραπεζίου, θὰ πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ μήκη ΡΗ καὶ ΔΗ. Θὰ ἔχωμεν

$$PH = \frac{3\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\beta^2}}{4} \quad (\S\ 312,\ \text{τύπος } 3),$$

$$\Delta H^2 = \frac{-2\alpha^2 + 8\beta^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 8\beta^2}}{16} \quad (\S\ 312,\ \text{τύπος } 4).$$

Ἑπομένως

$$(\Gamma P O \Delta) = (I P H \Delta) = PH \,.\, \Delta H =$$

$$\frac{3\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\beta^2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{-2\alpha^2 + 8\beta^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 8\beta^2}}}{4}.$$

Παρατήρησις. Διὰ $\alpha = \beta$, λαμβάνομεν τὸ κανονικὸν ἡμιεξάγωνον :

$$OE = x = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{8\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha}{2} = 2\alpha.$$

Θὰ εἶναι δὲ τότε τὸ τρίγωνον ΡΕΖ τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἀφοῦ

$$OE = 2 \,.\, OP = 2\alpha.$$

Ὥστε

$$(\Gamma P O \Delta) = PH \,.\, \Delta H = \frac{6\alpha}{4} \cdot \frac{\sqrt{12\alpha^2}}{4} = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{4}.$$

1712 β. Σημείωσις. 1) Τὸ ἀνωτέρω ζήτημα προετάθη τὸ 1856 εἰς τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῆς *École Navale*· ὁ Gérono εἰς τὰ N.A., 1857, σ. 5 δίδει ἀλγεβρικὴν αὐτοῦ λύσιν χρησιμοποιῶν τὴν μέθοδον τῶν ἀπροσδιορίστων συντελεστῶν. (Βλ. *Exercices d'Algèbre* ὑπὸ F.G.-M., n° 975 καὶ Burat, *Traité d'Algèbre Élémentaire*, n° 338, σ. 512).

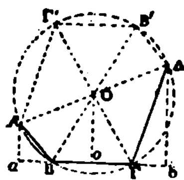
Ἀνάλογα θὰ εἴχομεν νὰ παρατηρήσωμεν διὰ τὸ πρόβλημα τῆς § 1709, ὡς καὶ διὰ μερικὰ ἄλλα. Τὸ πρόβλημα τῆς § 1713 ἀπαιτεῖ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς Τριγωνομετρίας.

Ὅπως ἤδη ἐτονίσαμεν (§ 336), *ἡ γενικωτέρα καὶ μᾶλλον γόνιμος μέθοδος διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου μιᾶς ποσότητος συνίσταται εἰς ἐπεξεργασίαν καὶ διερεύνησιν τοῦ θέματος διὰ τῆς Ἀλγέβρας.*

Θὰ πρέπει ὅμως νὰ ὁμολογηθῇ ὅτι, εἰς πλείστας περιπτώσεις, ἡ γεωμετρικὴ μέθοδος παρουσιάζει μεγάλα πλεονεκτήματα—καὶ μάλιστα ὅσον ἀφορᾷ τὴν θαυμαστὴν ἁπλότητα καὶ κομψότητα, αἵτινες χαρακτηρίζουν πολλὰς τῶν γεωμετρικῶν λύσεων, ἃς ἤδη ἐδώσαμεν εἰς προηγούμενα προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ.

Ἡ μέθοδος τῆς ἀπαλοιφῆς, ἡ γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα *μέθοδος τῶν ἀπροσδιορίστων συντελεστῶν*, ὀφείλεται εἰς τὸν Bezout.

2) Διὰ τὸ μέγιστον τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 1110 α), ὅταν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἄνισοι, βλ. *A..d. Gerg.*, τόμ. XXI, 1830 - 31, σ. 86. — Πράγματι, *τὸ τετράπλευρον τοῦτο θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς ἡμικύκλιον καὶ ἡ ἄγνωστος πλευρά του* ΑΔ *θὰ εἶναι ἡ διάμετρος*, ἐπειδὴ τὸ μέγιστον τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓΔ λαμβάνεται ταυτοχρόνως μετὰ τοῦ μεγίστου τοῦ διπλασίου της ἢ τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΒ'Γ', ὅπου Β' καὶ Γ' τὰ συμμετρικὰ τῶν Β, Γ πρὸς τὸ κέντρον Ο. Εἶναι δὲ μέγιστον ἐκεῖνο ἐκ τῶν ἑξαγώνων, τῶν ἐχόντων σταθερὰν περίμετρον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν.



Σχ. 1110 α

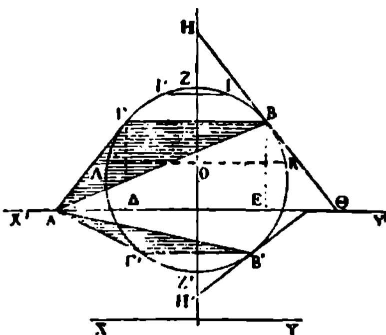
Ὁ προσδιορισμὸς οὕτω τοῦ μεγίστου τετραπλεύρου ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ *προβλήματος τοῦ Νεύτωνος: Δοθέντων τριῶν τμημάτων* ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, *νὰ κατασκευασθῇ ἡ περιφέρεια, ἡ ἔχουσα τὰ τμήματα ταῦτα ὡς διαδοχικὰς χορδὰς καὶ διάμετρον τὴν χορδὴν* ΑΔ (*A. d. G.*, τομ. XXI, σ. 98).

Προβάλλοντες ἐπὶ τῆς ΒΓ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας καὶ τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου, εὐκόλως ἀναγνωρίζομεν ὅτι αἱ προβολαὶ τῶν ἄκρων χορδῶν ἐπὶ τῆς μεσαίας εἶναι τμήματα ἴσα καὶ ἀντιθέτων φορῶν.

Πρόβλημα 616

1713. **Δίδονται περιφέρεια, σημεῖον Α καὶ εὐθεῖα XY. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ χορδὴ ΒΓ παράλληλος τῆς XY καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ γίνῃ μέγιστον.**

Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα κατὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ σημείου Α.



Σχ. 1111

Διὰ τοῦ σημείου Α φέρομεν παράλληλον Χ'Υ' πρὸς τὴν εὐθεῖαν XY. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓΔΕ, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου ὀρθογωνίου τοῦ ὁποίου δύο κορυφαὶ εὑρίσκονται ἐπὶ δοθέντος τόξου καὶ ἡ βάσις του ἐπ' εὐθείας Χ'Υ'.

Γνωρίζομεν (§ 360), ὅτι τοῦτο ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Β ἐφαπτομένης ΘΒΗ, διαιρουμένης εἰς τὸ σημεῖον Β εἰς δύο ἴσα μέρη.

Διερεύνησις. α) Ἐὰν ἡ Χ'Υ' διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, εἰς ἑκάστην τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν ἀντιστοιχεῖ καὶ ἓν μέγιστον—ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν τετραγώνου.

β) Ἐὰν ἡ Χ'Υ' τέμνῃ τὴν ἀκτῖνα ΘΖ', εἰς ἕκαστον τῶν ὁριζομένων δύο κ. τμημάτων ἀντιστοιχεῖ καὶ ἓν μέγιστον. Ἀναφέρομεν τὰς μεταβολὰς τοῦ ἐμβαδοῦ (ΑΒΓ), ἀναλόγως τῆς θέσεως τῆς χορδῆς ΒΓ:

1). Εἰς τὸ σημεῖον Ζ εἶναι $ΒΓ = 0$ καὶ (ΑΒΓ) ἐπίσης μηδέν.

2) Ἀπὸ τῆς θέσεως αὐτῆς μέχρι τῆς ΒΓ, τὸ ἐμβαδὸν (ΑΒΓ) αὐξάνει καὶ μέχρι τοῦ μεγίστου του.

3) Ἀπὸ τῆς θέσεως ΒΓ μέχρι τῆς ἐπὶ τῆς Χ'Υ' χορδῆς τῆς περιφερείας, τὸ ἐμβαδὸν (ΑΒΓ) ἐλαττοῦται μέχρι τῆς ἐλαχίστης αὐτοῦ τιμῆς $= 0$.

4) Ἀπὸ τῆς τελευταίας ταύτης θέσεως, τὸ ἐμβαδὸν αὐξάνει μέχρι τοῦ δευτέρου μεγίστου του εἰς τὴν θέσιν Β'Γ'.

5) Ἀπὸ τῆς θέσεως Β'Γ' ἐλαττοῦται μέχρι μηδενισμοῦ διὰ $Β \equiv Γ \equiv Ζ'$.

γ) Ἐὰν ἡ Χ'Υ' ἐφάπτεται τῆς περιφερείας εἰς τὸ Ζ' λ. χ., ὑπάρχει ἓν μόνον μέγιστον. Τὸ ἀντίστοιχον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον Ζ'ΒΓ(§ 1705).

δ) Ἐὰν ἡ Χ'Υ' εἶναι ἐξωτερικὴ τῆς περιφερείας — εἰς τὴν θέσιν ΧΥ λ. χ. — ὑπάρχει μία μόνον λύσις.

Πρόβλημα 617

1714. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν τριγώνων καὶ ἐχόντων διαφορὰν δύο γωνιῶν δεδομένην γωνίαν φ.

(*J. d. M. Élém. et Sp.*, τόμ. IV, σ. 70).

Σχ. 1112

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ $Α - Γ = φ$.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ διχοτόμος ΒΕ σχηματίζει μετὰ τῆς βάσεως γωνίας ἐχούσας διαφορὰν $Α - Γ = φ$ (§ 465). Ἐὰν λοιπὸν VT εἶναι ἐφαπτομένη τυχοῦσα καὶ ΔΒ χορδὴ σχηματίζουσα μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ταύτης γωνίας

$$ΒΔV - ΒΔΤ = φ,$$

ἡ βάσις ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θὰ πρέπει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΤ καὶ ἡ κορυφή του τὸ σημεῖον Β.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται οὕτω εἰς τὸ προηγούμενον τῆς § 1713. Φέρομεν τὴν ΒΡ κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔΟΔ' καὶ κατασκευάζομεν ἐφαπτομένην ΖΑΘ διχοτομουμένην εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς της Α.

Διερεύνησις. Αὕτη εἶναι ἀνάλογος τῆς προηγουμένης (§ 1713)· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Β θὰ ἀνήκῃ πάντοτε εἰς τὴν περιφέρειαν, ἡ παράλληλος ΒΡ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΥΤ θὰ τέμνῃ πάντοτε τὴν περιφέρειαν καὶ θὰ ὑπάρχουν ἑπομένως δύο πάντοτε λύσεις (ἢ δύο σχετικὰ μέγιστα).

Οὕτω, διὰ βάσιν ἐγγύτατα τοῦ σημείου Δ τὸ ἐμβαδὸν (ΑΒΓ) εἶναι ἐλάχιστον. Ἀπομακρυνομένης τῆς βάσεως ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου, τὸ ἐμβαδὸν αὐξάνει, γίνεται μέγιστον (σχετικὸν) εἰς τὴν θέσιν ΑΓ καὶ ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης ἐλαττοῦται πάλιν μέχρι μηδενισμοῦ, ὅταν ἡ ΑΓ λάβῃ θέσιν ἐπὶ τῆς ΒΡ. Αὐξάνει ἀκολούθως μέχρι τοῦ δευτέρου του (σχετικοῦ) μεγίστου εἰς τὴν θέσιν Α'Γ' τῆς ΑΓ, ἐλαττοῦται κατόπιν καὶ μηδενίζεται διὰ Α ≡ Γ ≡ Δ'.

Πρόβλημα 618

1715. Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 364).

Πρόβλημα 618—1

1716. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τοῦ μεγίστου ὀρθογωνίου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τομέα δοθέντος κύκλου, ὅταν ἡ ἐπίκεντρος γωνία μεταβάλλεται.

Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα ΑΟΒ ἀντιστοιχεῖ ὁ κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ ΑΟΒΔ καὶ συμπληρῶν μετὰ τοῦ πρώτου τὸν ὅλον κύκλον.

Ποία ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν μεγίστων ὀρθογωνίων τῶν ἐγγραφομένων εἰς ἕκαστον τῶν τομέων τούτων;

Σχ. 1113.

1) Ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὰ ἡμίση τῶν τομέων καὶ τὰ ἡμίση τῶν μεγίστων ὀρθογωνίων.

Διὰ τὴν γωνίαν ΗΟΥ, τὸ σημεῖον Τ (δηλ. ἡ μία κορυφὴ τοῦ μεγίστου ἐγγεγραμμένου ὀρθογωνίου εἰς τὸν κυκλ. τομέα διπλασίας ἐπικέντρου γωνίας) εἶναι μέσον τοῦ τόξου καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΥΤΣ. Διὰ τόξον ΑΕ μεγαλύτερον αὐτοῦ, τὸ σημεῖον U, μέσον τοῦ τόξου ΑΕ, δίδει τὴν ἐφαπτομένην UH.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΜUXY εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΗΟΖ (§ 352), δηλ. ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον UΟΗ καὶ προφανῶς

$$UOH > ΤΟΣ,$$

ἕπεται ὅτι τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον αὐξάνει μετὰ τῆς ἐπικέντρου γωνίας τοῦ κυκλ. τομέως εἰς ὃν εἶναι ἐγγεγραμμένον. Συνήθως δὲν θεωροῦμεν κυκλ. τομεῖς ἀνοίγματος μεγαλυτέρου τῶν 180° — εἰς ὃ καὶ ἀντιστοιχεῖ τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν μεγίστων ὀρθογωνίων· ἐὰν ὅμως θεωρήσωμεν τομεῖς μεγαλυτέρου ἀνοίγματος, ὡς τὸν ΑΟΔΒ,

καὶ εἰς αὐτὸν πάλιν ἐγγράφεται μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἓν μέγιστον ὀρθογώνιον.

Διὰ $\widehat{AOB} = 360^\circ$, τοῦ τετραπλεύρου ΟΖ'ΗΖ ἡ κορυφὴ Η ἔχει ἀπομακρυνθεῖ εἰς ἄπειρον καὶ τὸ ἀντίστοιχον μέγιστον ὀρθογώνιον ἔχει ἐμβαδὸν ἐπίσης ἀπείρως μεγάλης τιμῆς.

2) Τὸ ὀρθογώνιον ΝΘUΧ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον Ζ'ΘΗ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου μία κορυφὴ εἶναι τὸ Ι, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον ΟΛΚ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ μελετηθῇ ἡ σχέσις τῶν δύο αὐτῶν τριγώνων.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΟΘΖ' καὶ ΟΙΛ εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{O\Theta}{I\Lambda} = \frac{\Theta Z'}{OI} \quad \text{ἢ} \quad (I\Lambda)\,(\Theta Z') = R^2$$

καὶ ἑπομένως

$$(Z'OH).(O\Lambda K) = (O\Theta.\Theta Z')\,(OI.I\Lambda) = (O\Theta.OI)\,(\Theta Z'.I\Lambda)$$

ἢ

$$(Z'OH)\,(O\Lambda K) = R^2.R^2 = R^4.$$

Δηλαδή: *Τὸ γινόμενον τῶν ἐμβαδῶν τῶν μεγίστων ὀρθογωνίων, τῶν ἐγγραφομένων εἰς δύο συμπληροῦντας περιφέρειαν κυκλ. τομεῖς, εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὴν τετάρτην δύναμιν τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας.*

Πρόβλημα 619

1717. Εἰς δοθὲν κυκλικὸν τμῆμα νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 364, 2)).

Πρόβλημα 620

1718. Δοθείσης ἡμιπεριφερείας, νὰ ἀχθῇ χορδὴ αὐτῆς παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τετράπλευρον μὲ ἀπέναντι πλευρὰς τὴν χορδὴν ταύτην καὶ τὴν διάμετρον τῆς ἡμιπεριφερείας νὰ εἶναι τὸ μέγιστον.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 366).

Πρόβλημα 620—I

1718 α. Ἐκ τῶν τόξων τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ ἀνηκόντων εἰς διαφόρους περιφερείας, ποῖον ἐκεῖνο διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἀντίστοιχον κυκλικὸν τμῆμα ἔχει τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν;

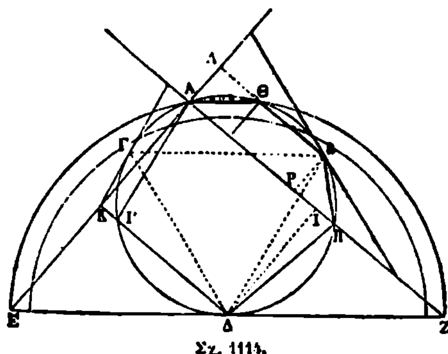
Εἶναι ἡμιπεριφέρεια. Ἐπειδὴ τὸ μέγιστον τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας λαμβάνεται ταὐτοχρόνως μετὰ τοῦ μεγίστου τῆς ἐπιφανείας, ἣν θὰ ἔδιδε τόξον διπλάσιον τοῦ θεωρουμένου. Τὸ τελευταῖον δὲ τοῦτο θὰ ἦτο ὁλόκληρος περιφέρεια καὶ ἐπιφάνεια αὐτῆς ἡ μεγίστη ἐκ τῶν περικλειομένων ὑπὸ γραμμῆς σταθερᾶς περιμέτρου.

Πρόβλημα 621

1719. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Δ μιᾶς ἐφαπτομένης δοθείσης περιφερείας (Κ) γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ΕΑΖ τέμνουσαν τὴν (Κ). Συνδέομεν ἀκολούθως ἓν τῶν σημείων τομῆς Α μετὰ τῶν ἄκρων Ε, Ζ τῆς διαμέτρου τῆς γραφείσης ἡμιπεριφερείας διὰ τῶν χορδῶν ΑΕ, ΑΖ αὐτῆς.

Ζητεῖται ὅπως εἰς ἕκαστον τῶν κυκλικῶν τμημάτων, τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΑΖ, τῆς περιφερείας (Κ) ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον τραπέζιον.

Τὰ τμήματα ΕΔ, ΔΖ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Δ εἶναι ἴσα, ἕκαστον δὲ τῶν ζητουμένων σημείων Β, Γ εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ μεγίστου ὀρθογωνίου, τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸ ἀντίστοιχον κυκλικὸν τμῆμα. Κατὰ τὸ *θεώρημα τοῦ Pollock* (§ 668) ἑπομένως, τὰ τρία σημεῖα Β, Γ, Δ εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν (Κ). Ὁρίζονται κατὰ συνέπειαν ἀμέσως τὰ σημεῖα Β καὶ Γ.



Σχ. 1114.

Κατὰ τὰς §§ 365 καὶ 1708, τὸ τραπέζιον ΑΘΒΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον ΒΡΑΛ.

Παρατηρήσεις. 1) Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας, ἡ ἡμιπεριφέρεια μὲ ἀκτῖνα ΑΔ ὁρίζει κυκλ. τμῆμα ΑΒΗ τοιοῦτον, ὥστε ἡ κορυφὴ Β νὰ εἶναι κοινὴ τῶν μεγίστων τραπεζίων τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὰ διάφορα κυκλικὰ τμήματα ΑΒΗ (ὅταν δηλ. τὸ Α μεταβάλλεται). Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ σημεῖον Γ. Πράγματι, τὰ σημεῖα ταῦτα Β καὶ Γ εἶναι σταθερὰ τῆς περιφερείας (Κ), ὡς κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ μὲ σταθερὰν τὴν κορυφὴν Δ.

2) Τὸ ὀρθογώνιον ΔΙΑΚ εἶναι μέγιστον, ὡς καὶ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ τραπέζιον ΑΗΔΙ'.

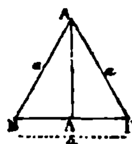
3) Τὸ γενικὸν πρόβλημα: νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον τραπέζιον εἰς ἓν τυχὸν κυκλ. τμῆμα ΑΒΗ, δὲν δύναται νὰ λυθῇ διὰ τῆς χρήσεως τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου μόνον.

Ἐπειδὴ ὑπάρχουν τρία κυκλ. τμήματα καὶ ἑπομένως τρεῖς ἀπαντήσεις, ὁριζόμεναι διὰ τῶν σημείων Β, Γ καὶ Δ. Ὁ δὲ καθορισμὸς τῆς ἐφαπτομένης ὁδηγεῖ εἰς ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ.

'Αριθμητικαὶ σχέσεις

Πρόβλημα 622

1720. Νὰ ὁρισθοῦν ἡ πλευρὰ α καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἰσοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει τοῦ ὕψους υ. — Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου συναρτήσει τοῦ ἀποστήματος υ αὐτοῦ.



Σχ. 1115.

1) $AB^2 - B\Delta^2 = \upsilon^2$ (σχ. 1115).

$$\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} = \upsilon^2$$

καὶ
$$\alpha = \frac{2\upsilon}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\,\upsilon}{3}.$$

2) $'\text{Εμβαδὸν} = \frac{\alpha\upsilon}{2} = \frac{2\upsilon\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\upsilon}{2} = \frac{\upsilon^2}{\sqrt{3}}.$

3) $'\text{Εμβαδὸν κανν. ἑξαγώνου} = 2\upsilon^2\sqrt{3}.$

Πρόβλημα 622—I

1721. 1) Τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει τοῦ ἀθροίσματος λ τῆς πλευρᾶς καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ εἶναι

$$E = \frac{\lambda^2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}.$$

2) Τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει τῆς διαφορᾶς δ τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ εἶναι

$$E = \frac{\delta^2\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}.$$

3) Τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει τοῦ ἀθροίσματος λ' ἢ τῆς διαφορᾶς δ' τοῦ ἀποστήματος ἀπὸ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ εἶναι ἀντιστοίχως

$$E = \frac{9\lambda'^2\sqrt{3}}{13+4\sqrt{3}} \quad \text{καὶ} \quad E = \frac{9\delta'^2\sqrt{3}}{13-4\sqrt{3}}.$$

Πρόβλημα τοῦ Gerbert 623

1722. Νὰ ἐκφρασθοῦν τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου συναρτήσει τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

Ἂν α εἶναι ἡ ὑποτείνουσα καὶ σ^2 τὸ ἐμβαδόν, τὸ γινόμενον βγ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ. Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως τὰς σχέσεις

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \qquad (1)$$

καὶ
$$\beta\gamma = 2\sigma^2 \quad \text{ἢ} \quad 2\beta\gamma = 4\sigma^2. \qquad (2)$$

Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες αὐτάς, λαμβάνομεν

$$(\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + 4\sigma^2,$$
$$(\beta-\gamma)^2 = \alpha^2 - 4\sigma^2.$$

Ἐπομένως

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 + 4\sigma^2} + \sqrt{\alpha^2 - 4\sigma^2}\right),$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 + 4\sigma^2} - \sqrt{\alpha^2 - 4\sigma^2}\right).$$

1722 α. Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω λύσις ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Gerbert καὶ θεωρεῖται ὑπὸ τοῦ Chasles (*Aperçu historique*, 2α ἐκδ., σ. 505) *ἀξιόλογος διὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην* (περὶ τὸ 1000), ἐπειδὴ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς λύσεως ἐξισώσεως β' βαθμοῦ.

Διὰ τὰς ἐργασίας τοῦ Gerbert, βλέπε *Histoire des Mathématiques* τοῦ Jacques Boyer, σ. 78.

Πρόβλημα 623—I

1723. **Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον τετραγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.**

Εἰς προηγούμενον ζήτημα (§ 1490), ὑπεδείχθη ὁ τρόπος ἐγγραφῆς τοῦ τετραγώνου τούτου καὶ εὕρομεν ὅτι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς x τοῦ τετραγώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς α τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $2\sqrt{3} - 3$. Ἐπομένως

$$E = x^2 = \alpha^2 (21 - 12\sqrt{3}).$$

Πρόβλημα 624

1724. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου συναρτήσει τῶν τριῶν ὑψῶν αὐτοῦ.**

Ἄς εἶναι α, β, γ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, υ_α, υ_β, υ_γ, τὰ ὕψη αὐτοῦ, E τὸ ἐμβαδόν του καὶ E' τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου μὲ πλευρὰς

$$\alpha' = \frac{1}{\upsilon_\alpha},\quad \beta' = \frac{1}{\upsilon_\beta},\quad \gamma' = \frac{1}{\upsilon_\gamma}.$$

Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{E}{E'} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \frac{\alpha^2}{\dfrac{1}{\upsilon_\alpha^2}} = \alpha^2 \upsilon_\alpha^2 = 4E^2.$$

$$E = \frac{1}{4E'} = \frac{1}{4\sqrt{\tau'(\tau' - \alpha')(\tau' - \beta')(\tau' - \gamma')}},$$

ὅπου ἐτέθη: $\qquad 2\tau' = \alpha' + \beta' + \gamma'$.

1724 α. Σημείωσις. 1) Μία ἄλλη ἀπόδειξις ὑπάρχει εἰς τὴν 2αν καὶ 3ην ἐκδ. τῶν *Exercices de Géométrie*. Βλ. ἐπίσης: N. A., 1843, σ. 546, n° 33, Terquem καὶ 1846, σ. 225, Huet.

2) Ἡ ἔκφρασις τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ δίδεται, ἄνευ ἀποδείξεως, ὑπὸ τοῦ *Ἥρωνος τοῦ νεωτέρου* καὶ κατὰ τὸν Maximilien Marie (*Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*, τόμ. I, σ. 177) θὰ πρέπει νὰ ἀνήκῃ εἰς αὐτόν, ἀντιθέτως πρὸς τὴν ἄποψιν, καθ' ἣν ἡ πατρότης τῆς προτάσεως αὐτῆς ἀποδίδεται εἰς τὸν *Ἥρωνα τὸν πρεσβύτερον* ἢ *Ἀλε-*

ξανδρινὸν (*Aperçu historique* σ. 544. — N. A., 1861, σ. 432, σημ. τοῦ Vincent. — *Histoire de Mathématiques*, ὑπὸ F. Höffer, σ. 241).
Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις (G., n° 352) ὀφείλεται εἰς τὸν *Λεονάρδον τῆς Πίζης* (§ 1604).

Πρόβλημα 624—I

1724 β. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου συναρτήσει τῶν διαμέσων αὐτοῦ μ_α, μ_β, μ_γ.**

Προεκτείνοντες τὴν διάμεσον ΓΘΔ (Θ τὸ κ. βάρους) κατὰ μῆκος ΔΗ = ΘΔ, λαμβάνομεν τρίγωνον ΒΘΗ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὸ τρίτον ἐκείνου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἶναι

$$B\Theta = \frac{2}{3}\mu_\beta, \quad \Theta H = \frac{2}{3}\mu_\gamma, \quad HB = \frac{2}{3}\mu_\alpha,$$

ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι

$$E' = \sqrt{\left(\frac{\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma}{3}\right)\left(\frac{\mu_\beta + \mu_\gamma - \mu_\alpha}{3}\right)\left(\frac{\mu_\gamma + \mu_\alpha - \mu_\beta}{3}\right)\left(\frac{\mu_\alpha + \mu_\beta - \mu_\gamma}{3}\right)}.$$

Ἐπομένως:

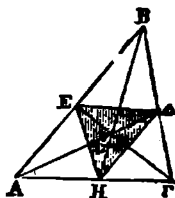
$$E = (AB\Gamma) = 3 \,.\, E' = \frac{4}{3}\sqrt{M(M-\mu_\alpha)(M-\mu_\beta)(M-\mu_\gamma)}.$$

ὅπου ἐτέθη:

$$M = \frac{\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma}{2}.$$

Πρόβλημα 625

1725. Συναρτήσει τῶν πλευρῶν δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἐκφρασθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ του πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ ΑΒΓ.



Σχ. 1116.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ ΔΕΖ τὸ τῶν ποδῶν τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΗΓΔ καὶ ΑΒΓ ἔχουν μίαν γωνίαν κοινήν, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{(H\Gamma\Delta)}{(A\Gamma B)} = \frac{H\Gamma \,.\, \Gamma\Delta}{\alpha\beta}. \qquad (1)$$

Ἀλλ' εἶναι

$$\frac{H\Gamma}{\alpha} = \frac{HA}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha+\gamma}, \quad H\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\gamma}$$

καὶ ἀναλόγως

$$\Gamma\Delta = \frac{\alpha\beta}{\gamma+\beta}.$$

Ἐπομένως:

$$\frac{(H\Gamma\Delta)}{(A\Gamma B)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}, \qquad (2)$$

$$\frac{(\mathrm{EB\Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\alpha\gamma}{(\alpha+\beta)\,(\beta+\gamma)}, \tag{3}$$

$$\frac{(\mathrm{HAE})}{(\mathrm{BA\Gamma})}=\frac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)\,(\alpha+\gamma)}. \tag{4}$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν σχέσεων (2), (3) καὶ (4), λαμβάνομεν

$$\frac{(\mathrm{AB\Gamma})-(\mathrm{HE\Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\alpha\beta\,(\alpha+\beta)+\beta\gamma\,(\beta+\gamma)+\gamma\alpha\,(\gamma+\alpha)}{(\alpha+\beta)\,(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)},$$

ἢ καὶ

$$\frac{(\mathrm{HE\Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{(\alpha+\beta)\,(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)-\alpha\beta\,(\alpha+\beta)-\beta\gamma\,(\beta+\gamma)-\gamma\alpha\,(\gamma+\alpha)}{(\alpha+\beta)\,(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)}.$$

Ἀπλοποιοῦντες καὶ ἀντιστρέφοντες τοὺς ὅρους, εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{HE\Delta})}=\frac{(\alpha+\beta)\,(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)}{2\,\alpha\beta\gamma}.$$

1725 α. Σημείωσις. 1) Βλέπε: *Revue de l'Enseignement secondaire spécial,* 1879, σ. 123 καὶ *Ex. d'Algèbre* ὑπὸ F. G. - M., n° 1261.

2) Ἐὰν S, P, Q εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἐμβαδὰ τοῦ δοθέντος τριγώνου, τοῦ ποδικοῦ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων καὶ τοῦ ποδικοῦ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α καὶ τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$P=\frac{2\,\alpha\beta\gamma\,S}{(\alpha+\beta)\,(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)},\quad Q=\frac{2\,\alpha\beta\gamma\,S}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\beta+\gamma)}.$$

(N. A., 1879, σ. 528, Dostor καὶ 1880, σ. 473, ἀπόδειξις ὑπὸ Fauré, κλπ.).

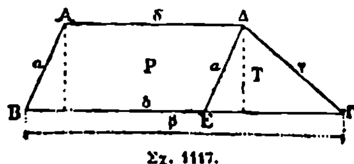
1725 β. Προβλήματα. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων μὲ κορυφάς.

1) Τὰ μέσα τῶν ὑψῶν τριγώνου.
2) Τὰ μέσα τῶν διχοτόμων αὐτοῦ.
3) Τὰ μέσα τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τῶν πλευρῶν.
4) Τὰ μέσα τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τῶν κορυφῶν.

Βλέπε: *I. d. M.*, 1906, σ. 174 καὶ 1911, σ. 79, ἀπαντήσεις τῶν Brocard, Hendlé, Genty, Delahaye, Mathieu, Barbarin, Welsch κλπ.

Πρόβλημα 626

1726. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου συναρτήσει τῶν τεσσάρων πλευρῶν του.



Σχ. 1117.

Τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 1117) ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου, P μὲ βάσιν δ καὶ ὕψος υ, καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου T, μὲ πλευρὰς α, γ καὶ ΔΕ = β − δ. Ἔστω Ε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζίου· θὰ ἔχωμεν:

$$\mathrm{E}=\frac{\beta+\delta}{2}\,.\,\upsilon,\qquad \mathrm{T}=\frac{\beta-\delta}{2}\,.\,\upsilon,$$

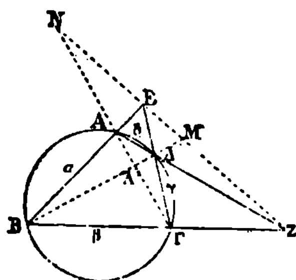
$$\frac{E}{T}=\frac{\beta+\delta}{\beta-\delta},\quad E=T.\frac{\beta+\delta}{\beta-\delta},$$

ή

$$E=\frac{\beta+\delta}{\beta-\delta}\sqrt{(\tau-\beta)(\tau-\delta)(\tau-\delta-\alpha)(\tau-\delta-\gamma)},$$

όπου ετέθη $2\tau=\alpha+\beta+\gamma+\delta.$

1726 α. Παρατηρήσεις. 1) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου τοῦ Brahma - Gupta :



Σχ. 1118.

$$E=\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}.$$

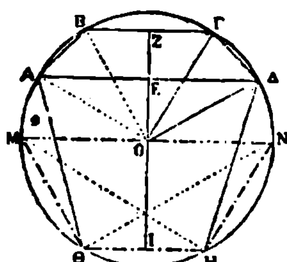
2) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΛΜΝ (σχ. 1118), μὲ κορυφὰς τὰ τρία διαγώνια σημεῖα ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου εἶναι

$$(\Lambda MN)=\frac{4\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}}{\left(\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}-\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\right)\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}-\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}\right)}$$

(*I. d. M.*, 1903, σ. 160, n° 2112, Mathieu).

Πρόβλημα 627

1727. **Αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν τραπεζίου κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὡς πρὸς τὸ κέντρον καὶ ἰσοῦνται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας καὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου τούτου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας.**



Σχ. 1119.

Ἔστω $A\Delta=\rho\sqrt{3}$ καὶ $B\Gamma=\rho$. Ἐπειδή, ὡς γνωστὸν

$$OE=\frac{\rho}{2},\quad OZ=\rho\frac{\sqrt{3}}{2},$$

τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου θὰ εἶναι

$$EZ=\frac{\rho}{2}(\sqrt{3}-1) \qquad (1)$$

καὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του

$$AE+BZ=\frac{\rho}{2}(\sqrt{3}+1). \qquad (2)$$

Ἑπομένως :

$$(AB\Gamma\Delta)=(EZ).(AE+BZ)=\frac{\rho^2}{4}(3-1)=\frac{\rho^2}{2}.$$

Εἶναι δηλ. τὸ ἐν λόγῳ τραπέζιον ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου μὲ πλευρὰν τὴν ἀκτῖνα ρ.

Πρόβλημα 627—I

1728. **Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΔΗΘ τοῦ προηγουμένου σχήματος, διὰ τὸ ὁποῖον αἱ πλευραὶ $ΑΔ = ρ\sqrt{3}$ καὶ $ΘΗ = ρ$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Ο.**

Θὰ ἔχωμεν $$ΕΙ = \frac{ρ}{2}(\sqrt{3}+1) \qquad (3)$$

καὶ $$(ΑΔΗΘ) = \frac{ρ^2}{2}(2+\sqrt{3}).$$

Πρόβλημα 627—II

1729. **Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΜΝΗΘ, διὰ τὸ ὁποῖον αἱ διαγώνιοι ΘΝ, ΗΜ εἶναι ἴσαι πρὸς $ΑΔ = ρ\sqrt{3}$.**

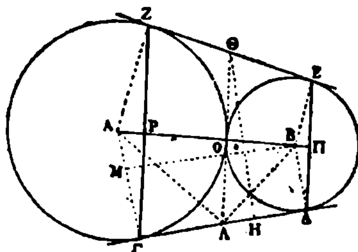
Εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου:

$$ΜΟ + ΘΙ = \frac{3}{2}ρ, \quad ΟΙ = \frac{ρ\sqrt{3}}{2} \quad ἄρα$$

$$(ΜΝΗΘ) = \frac{3ρ^2}{4}\sqrt{3}.$$

Πρόβλημα 628

1730. **Δύο περιφέρειαι μὲ ἀκτῖνας $ΑΓ = α$ καὶ $ΒΔ = β$ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῶν ἀκτίνων τῶν περιφερειῶν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΕΔΓΖ, μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τῶν περιφερειῶν.**



Σχ. 1120.

Ἄς εἶναι ΘΛ ἡ ἐσωτερικὴ κοινὴ ἐφαπτομένη καὶ ΘΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ:

$$ΘΖ = ΘΟ = ΘΕ,$$

καὶ τὸ Θ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΖ. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου λαμβάνεται διὰ τοῦ γινομένου ΓΔ . ΘΗ, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ μήκη ταῦτα συναρτήσει τῶν ἀκτίνων α καὶ β.

Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΓΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν κάθετον ΒΜ ἐπὶ τὴν ΑΓ, αἱ δὲ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΜ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΜΒ ἔχουν ὡς μήκη ἀντιστοίχως:

$$ΑΒ = α + β, \quad ΑΜ = α - β.$$

Ἑπομένως:

$$ΓΔ^2 = (α+β)^2 - (α - β)^2, \quad ΓΔ = 2\sqrt{αβ}.$$

Τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΜΒ, ΘΗΛ αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας· εἶναι ἐπομένως ταῦτα ὅμοια καὶ πρὸς τούτοις

$$ΘΛ = ΓΔ = ΒΜ.$$

Ἄρα :

$$\frac{ΘΗ^2}{ΘΛ^2} = \frac{ΜΒ^2}{ΑΒ^2} \text{ ἢ } \frac{ΘΗ^2}{4αβ} = \frac{4\,αβ}{(α+β)^2} \text{ καὶ } ΘΗ = \frac{4\,αβ}{α+β}.$$

Ἐπομένως

$$(ΓΔΕΖ) = (ΓΔ)\,.\,(ΘΗ) = \frac{8\,αβ\sqrt{αβ}}{α+β}.$$

Πρόβλημα 628—I

1731. Τοῦ προηγουμένου τραπεζίου (§ 1730), νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις καὶ τὸ ὕψος.

Τὰ τρίγωνα ΑΡΓ, ΑΜΒ εἶναι ὅμοια· ἐπομένως

$$\frac{ΓΡ}{α} = \frac{ΒΜ}{ΑΒ},\quad ΓΡ = \frac{α\,.\,ΒΜ}{ΑΒ} = \frac{2\,α\sqrt{αβ}}{α+β} \qquad (1)$$

καὶ ὁμοίως

$$ΔΠ = \frac{2\,β\sqrt{αβ}}{α+β}. \qquad (2)$$

Ἐπίσης :

$$\frac{ΑΡ}{α} = \frac{ΑΜ}{ΑΒ},\quad \frac{ΑΡ}{α} = \frac{α-β}{α+β},\quad ΑΡ = \frac{α\,(α-β)}{α+β} \qquad (3)$$

καὶ

$$ΒΠ = \frac{β\,(α-β)}{α+β}. \qquad (4)$$

Ἄρα

$$ΡΠ = ΑΒ - ΑΡ + ΒΠ = \frac{4\,αβ}{α+β}. \qquad (5)$$

Τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων ΓΡ + ΔΠ εἶναι ἴσον πρὸς

$$\frac{2\,α\sqrt{αβ} + 2\,β\sqrt{αβ}}{α+β} = 2\sqrt{αβ} \qquad (6)$$

καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἐπομένως :

$$(ΓΡ + ΔΠ)\,.\,(ΡΠ) = 2\sqrt{αβ}\,.\,\frac{4\,αβ}{α+β} = \frac{8\,αβ\sqrt{αβ}}{α+β}.$$

Πρόβλημα 628—II

1732. Εἰς τὸ ἴδιον σχῆμα (1120), νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τραπεζίων ΓΛΘΖ καὶ ΛΔΕΘ.

Εὑρίσκομεν :

$$\text{Τραπέζιον ΓΛΘΖ} = \frac{2\sqrt{αβ}\,(3\,α+β)\,αβ}{(α+β)^2}.$$

$$\text{Τραπέζιον ΛΔΕΘ} = \frac{2\sqrt{αβ}\,(3\,β+α)\,αβ}{(α+β)^2}.$$

Ἐπαλήθευσις. $(ΓΛΘΖ) + (ΛΔΕΘ) = \dfrac{8\,αβ\sqrt{αβ}}{α+β} = (ΓΔΕΖ).$

Πρόβλημα 628—III

1733. **Δύο περιφέρειαι τέμνονται ὀρθογωνίως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν ἐξωτερικῶν κοινῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν χορδῶν ἐπαφῆς, συναρτήσει τῶν ἀκτίνων τῶν δύο περιφερειῶν.**

Ἡ γωνία ΑΝΒ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ἀπόστασις ΑΒ ἴση πρὸς

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Σχ. 1121.

Ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον, τὴν χρησιμοποιηθεῖσαν εἰς τὸ τέλος τῆς § 1731, ὑπολογίζομεν τὰ μήκη ΓΡ, ΔΠ, ΡΠ. Εὑρίσκομεν:

$$(\text{ΕΖΓΔ}) = \frac{4\,\alpha\beta\,\sqrt{\alpha\beta}\,(\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Πρόβλημα 629

1734. **Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰδίου τραπεζίου, συναρτήσει τῶν ἀκτίνων α, β καὶ τῆς διακέντρου δ δύο ἐξωτερικῶς ἀλλήλων κειμένων περιφερειῶν.**

Σχ. 1122.

Φέρομεν τὴν ΒΜ παράλληλον τῆς ΓΔ· εὑρίσκομεν

$$\text{ΒΜ}^2 = \delta^2 - (\alpha-\beta)^2 = \lambda^2,$$

καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΜ εἶναι γνωσταί.

Ἐπίσης

$$\frac{ΓΡ}{α}=\frac{λ}{δ},\quad ΓΡ=\frac{αλ}{δ},\quad ΔΠ=\frac{βλ}{δ}.\ \text{Ἐπομένως:}$$

$$(ΕΖΓΔ)=\frac{α+β}{δ^2}\left(\sqrt{δ^2-(α-β)^2}\right)^3.$$

Παρατηρήσεις. 1) Τὰ προηγούμενα προβλήματα (§ 628, I, II, III), εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις τοῦ ἀνωτέρω.

Διὰ τὸ τῆς § 1730 λ. χ., ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $δ=α+β$ καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν μερικὰς ἁπλοποιήσεις.

2) Διὰ τὰς λεπτομερείας τῶν ὑπολογισμῶν εἰς τὰς §§ 1732, 1733, 1734 καὶ 1736, βλ. 2αν καὶ 3ην ἔκδοσιν τοῦ παρόντος ἔργου.

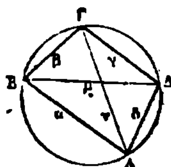
Πρόβλημα 630

1735. **Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι ἐγγραψίμου τετραπλεύρου συναρτήσει τῶν τεσσάρων αὐτοῦ πλευρῶν.**

Τὰ *θεωρήματα τοῦ Πτολεμαίου* (§ 1209 καὶ 1211) δίδουν

$$μν=αγ+βδ \tag{1}$$

$$\frac{μ}{ν}=\frac{αβ+γδ}{αδ+βγ}. \tag{2}$$



Σχ. 1123.

Διὰ πολ)σμοῦ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

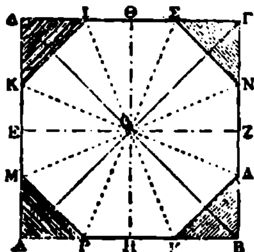
$$μ^2=\frac{(αγ+βδ)(αβ+γδ)}{αδ+βγ},$$

καὶ διὰ διαιρέσεως αὐτῶν

$$ν^2=\frac{(αγ+βδ)(αδ+βγ)}{αβ+γδ}.$$

Πρόβλημα 630—I

1736. **Δίδεται τετράγωνον πλευρᾶς α. Ποῖον μέρος τοῦ τετραγώνου τούτου πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἐξ ἑκάστης γωνίας, ὥστε τὸ ὑπολειπόμενον σχῆμα νὰ εἶναι κανονικὸν ὀκτάγωνον;**



Σχ. 1124.

Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ, τὰς εὐθείας ΕΖ, ΗΘ (διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν διαγωνίων), καθὼς καὶ τὰς διχοτόμους ΙΙ′, ΚΛ, ΜΝ καὶ ΡΣ τῶν γωνιῶν τῶν τεσσάρων πρώτων εὐθειῶν.

Τὰ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων ὁριζόμενα σημεῖα ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου ὀκταγώνου.

Εὑρίσκομεν:

$$ΔΙ=α\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)=α\cdot\frac{1}{3{,}41421...}=α\cdot(0{,}292893...).$$

Πρόβλημα 631

1737. Νὰ ἐκφρασθοῦν τὸ ἐμβαδὰ τῶν κανονικῶν πολυγώνων μὲ 6, 12, 8, 10, 5 καὶ 15 πλευρὰς συναρτήσει τῆς πλευρᾶς ἑκάστου.

Περιοριζόμεθα νὰ ἐκθέσωμεν τὰ ἀποτελέσματα μόνον. Αἱ λύσεις τῶν προβλημάτων αὐτῶν εὑρίσκονται εἰς τὰς δύο πρώτας ἐκδόσεις τοῦ παρόντος ἔργου.

Κανονικοῦ ἑξαγώνου $= \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2} = \alpha^2\,(2{,}59807\ldots)$.

1738. Κανονικοῦ δωδεκαγώνου $= 3\,\alpha^2\,(2+\sqrt{3})$.

1739. Κανονικοῦ ὀκταγώνου $=\alpha^2\,(2+2\sqrt{2}) = \alpha^2\,(4{,}8284\ldots)$.

1740. Κανονικοῦ δεκαγώνου $= \frac{5}{2}\,\alpha^2\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right) = \alpha^2\,(7{,}6942\ldots)$.

1741. Κανονικοῦ πενταγώνου $= \alpha^2\,(1{,}7205\ldots)$.

1742. Κανονικοῦ δεκαπενταγώνου $= \alpha^2\,(17{,}643\ldots)$.

1743. Σχόλιον. Ὁ ἑπόμενος τύπος ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τυχόντος κανονικοῦ πολυγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ:

$$E\nu = \frac{1}{4}\,\nu\alpha^2\,\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{\nu}\right).$$

Δηλαδή: *Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ γινομένου τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν καὶ τῆς συνεφαπτομένης τοῦ ἡμίσεος τῆς γωνίας εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ.* (*Complements de Trigonométrie*, n° 348).

Θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον αὐτὸν διὰ τὰ ἐμβαδὰ μερικῶν κανονικῶν πολυγώνων, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ Γεωμετρία δὲν παρέχει ἄμεσον τρόπον ὑπολογισμοῦ αὐτῶν.

Κανονικὸν ἑπτάγωνον . . . $E_7 = \frac{7}{4}\,\alpha^2\,\sigma\varphi\,\frac{\pi}{7} = \alpha^2\,(3{,}6340\ldots)$.

Κανονικὸν ἐννεάγωνον . . . $E_9 = \frac{9}{4}\,\alpha^2\,\sigma\varphi\,\frac{\pi}{9} = \alpha^2\,(6{,}1817\ldots)$.

Κανονικὸν ἑνδεκάγωνον . . . $E_{11} = \frac{11}{4}\,\alpha^2\,\sigma\varphi\,\frac{\pi}{11} = \alpha^2\,(9{,}3670\ldots)$.

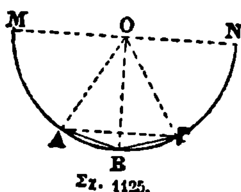
κ. ο. κ.

Ὁ ἀκόλουθος πίναξ παρέχει τὰ ἐμβαδὰ τῶν κανονικῶν πολυγώνων μέχρι τοῦ εἰκοσαγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α ἑκάστου.

Πλῆθος πλευρῶν	Ἐμβαδὸν	Πλῆθος πλευρῶν	Ἐμβαδὸν
3	$= (0{,}4330\ldots)\alpha^2$	12	$= (11{,}196\ldots)\alpha^2$
4	$(1{,}0000\ldots)\alpha^2$	13	$(13{,}188\ldots)\alpha^2$
5	$(1{,}7205\ldots)\alpha^2$	14	$(15{,}335\ldots)\alpha^2$
6	$(2{,}5981\ldots)\alpha^2$	15	$(17{,}643\ldots)\alpha^2$
7	$(3{,}6340\ldots)\alpha^2$	16	$(20{,}140\ldots)\alpha^2$
8	$(4{,}8284\ldots)\alpha^2$	17	$(23{,}18\ \ldots)\alpha^2$
9	$(6{,}1817\ldots)\alpha^2$	18	$(25{,}53\ \ldots)\alpha^2$
10	$(7{,}6942\ldots)\alpha^2$	19	$(28{,}54\ \ldots)\alpha^2$
11	$(9{,}3670\ldots)\alpha^2$	20	$(31{,}57\ \ldots)\alpha^2$

Πρόβλημα 632

1744. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν κανονικῶν πολυγώνων μὲ 6, 12, 8, 10, 5 καὶ 15 πλευράς, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τῆς περιγεγραμμένης εἰς ἕκαστον περιφερείας.



Σχ. 1125.

Βλέπε τὰς δύο πρώτας ἐκδόσεις τοῦ παρόντος ἔργου. Διὰ τὸ δωδεκάγωνον λ. χ. ἔχομεν

$$E_{12} = 6\,(ΑΒΓΟ) = 6\,.\left(\frac{ΟΒ.ΑΓ}{2}\right) = 3R^2.$$

1744 α. Παρατήρησις. Ὁ ἑπόμενος τύπος ἐφαρμόζεται εἰς πᾶν κανονικὸν πολύγωνον καὶ παρέχει τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R :

$$E_\nu = \frac{1}{2}\,\nu\,R^2\,ημ\left(\frac{2\pi}{\nu}\right).$$

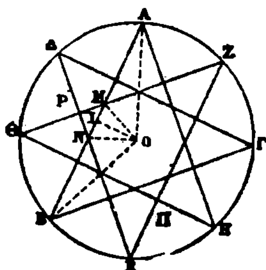
Δηλαδή : *Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ.*

Ὁ ἀκόλουθος πίναξ σχηματίζεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω τύπου.

Πλῆθος πλευρῶν	Ἐμβαδὸν	Πλῆθος πλευρῶν	Ἐμβαδὸν
3	(1,29904...)R^2	12	(3,0000...)R^2
4	(2,0000 ...)R^2	13	(3,0206...)R^2
5	(2,3776 ...)R^2	14	(3,0372...)R^2
6	(2,5981 ...)R^2	15	(3,0504...)R^2
7	(2,7364 ...)R^2	16	(3,0615...)R^2
8	(2,8284 ...)R^2	17	(3,0706...)R^2
9	(2,8925 ...)R^2	18	(3,0781...)R^2
10	(2,9349 ...)R^2	19	(3,0846...)R^2
11	(2,9735 ...)R^2	20	(3,0901...)R^2

Πρόβλημα 632—I

1745. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀστεροειδοῦς ὀκταγώνου.



Σχ. 1126.

Ἔστω R ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας· ἡ πλευρὰ τοῦ ἀστεροειδοῦς ὀκταγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$AB = R\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad (G., n^0\ 733).$$

Φέροντες τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ ὀκταγώνου, παρατηροῦμεν ὅτι σχηματίζονται ὀκτὼ τρίγωνα, ὡς τὸ ΑΟΒ, ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ ἀλληλοτεμνόμενα. Γίνεται δὲ φανερὸν ἐκ τῆς ἐποπτείας τοῦ σχήματος, ὅτι τὸ ὄγδοον ΜΟΝ τοῦ ἐσωτερικοῦ ὀκταγώνου μὲ πλευρὰν ΜΝ λαμβάνεται τρεῖς φορὰς κατὰ τὴν ἀρίθμησιν τῶν τριγώνων τού-

των· ἐπειδὴ περιέχεται καὶ εἰς τὰ τρία τρίγωνα ΔΟΕ, ΑΟΒ καὶ ΖΟΘ.

Τὰ δὲ τρίγωνα, ὡς τὸ ΜΡΝ, ὀκτὼ τὸν ἀριθμόν, λαμβάνονται δύο φορὰς ἕκαστον κατὰ τὴν ἰδίαν ἀρίθμησιν. Ἑπομένως:

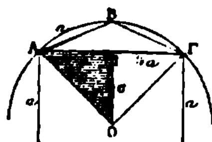
Εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀστεροειδοῦς ὀκταγώνου ΑΒ... πολλαπλασιάζοντες τὴν ἡμιπερίμετρον αὐτοῦ 4.ΑΒ ἐπὶ τὸ ἀπόστημα ΟΙ καὶ ἀφαιροῦντες ἐκ τοῦ γινομένου τούτου τὰ δύο ἴσα τετράγωνα μὲ μίαν κορυφὴν τὸ σημεῖον Ρ ἢ Π. Ἤ:

$$E'_8 = 2R^2\sqrt{2} - 2R^2(2-\sqrt{2}) = 4R^2(\sqrt{2}-1).$$

Σημείωσις. Τὰ ἀστεροειδῆ πολύγωνα ἐμελετήθησαν κατὰ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Kepler, τὸ 1619. Βλέπε εἰς τὰ ἑπόμενα (§ 1901, η) τὴν γενικὴν σπουδὴν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀστεροειδῶν πολυγώνων.

Πρόβλημα 632—ΙΙ

1746. **Δίδεται ἡ ἀκτὶς ΟΑ = R καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ = α ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς. Συναρτήσει τῶν μηκῶν αὐτῶν, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου, ὡς καὶ τὸ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου καὶ διπλασίου πλήθους πλευρῶν.**



Σχ. 1127.

1) Ὑπολογίζομεν τὸ ἀπόστημα ΟΙ = σ διὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΙ:

$$\sigma = \sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΟΓ εἶναι $\frac{1}{2}\alpha\sigma$ καὶ τὸ τοῦ πολυγώνου ἑπομένως

$$E_\nu = \frac{1}{2}\nu\alpha\sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2}{4}}.$$

2) Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς πλευρᾶς α′ τοῦ καν. πολυγώνου μὲ 2ν πλευράς, θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν γνωστὸν τύπον

$$\alpha' = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \alpha^2}} \qquad \text{(G., n° 286)}$$

Τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\sigma'^2 = R^2 - \left(\frac{1}{2}\alpha'\right)^2 = R^2 - \frac{\alpha'^2}{4}.$$

ἢ

$$\sigma' = \sqrt{R^2 - \frac{\alpha'^2}{4}}.$$

Ἑπομένως:

$$E_{2\nu} = \frac{1}{2}2\nu\alpha'\sqrt{R^2 - \frac{\alpha'^2}{4}} = \nu\alpha'\sqrt{R^2 - \frac{\alpha'^2}{4}}.$$

Πρόβλημα 632—ΙΙΙ

1747. **Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ πλευρά, ἡ περίμετρος καὶ ἡ ἐπιφάνεια κανονικοῦ ἑξαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τῆς περιγεγραμμένης πε-**

ριφερείας καὶ ἀκολούθως τὰ ἴδια στοιχεῖα διὰ τὸ εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν περιγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον.

Τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχει πλευρὰν R, περίμετρον 6 R καὶ ἀπόστημα $\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{1}{2} R \sqrt{3} = R\ (0{,}86602\ldots)$.

Τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $3R \cdot \frac{1}{2} R\sqrt{3} = \frac{3}{2} R^2\sqrt{3} = R^2\ (2{,}69800\ldots)$.

Τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχει ἀπόστημα ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα R· ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστημάτων των. Εὑρίσκομεν

Λόγος ἀποστημάτων .... $\frac{R}{{}^1/_2 R\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Πλευρὰ περ/νου ἑξαγώνου .... $R \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Περίμετρος περ/νου ἑξαγώνου ... $6 \cdot \frac{R \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{12R}{\sqrt{3}}$.

Ἐμβαδὸν περ/νου ἑξαγώνου ..... $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2R^2\sqrt{3}$.

Παρατήρησις. Τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου.

Πρόβλημα τοῦ Gregory 633

1748. Δίδονται τὰ ἐμβαδὰ α καὶ Α δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων πλήθους ν πλευρῶν καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ἄλλο περιγεγραμμένον εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. Εὕρετε, συναρτήσει τῶν ἐμβαδῶν τούτων, τὰ ἐμβαδὰ α', Α', τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν ἰδίαν περιφέρειαν πολυγώνου καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν διπλάσιον πλῆθος πλευρῶν.

Εὑρίσκομεν: $\alpha' = \sqrt{\alpha A}$, $A' = \frac{2\alpha A}{\alpha + \alpha'}$.

Παρατηρήσεις. 1) Διὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἐφαρμογὴν τῶν τύπων αὐτῶν βλέπε § 1773 γ.

2) Οἱ τύποι οὗτοι χρησιμεύουν διὰ τὸν κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ π.

1749. Σημείωσις. Αἱ στοιχειώδεις μέθοδοι πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ π εἶναι τέσσαρες. Δύο τούτων βασίζονται ἐπὶ τοῦ τύπου $\Gamma = 2\pi\rho$, τοῦ παρέχοντος τὸ μῆκος περιφερείας, καὶ οἱ ἄλλοι δύο ἐπὶ τοῦ τύπου $E = \pi\rho^2$, διὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Ἡ πρώτη μέθοδος, ὀφειλομένη εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, συνίσταται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ μήκους τῆς περιφερείας κύκλου διαμέτρου 1, θεωρουμένου αὐτοῦ ὡς κοινοῦ ὁρίου τῶν περιμέτρων κανονικῶν πολυγώνων Π_ν, Π'_ν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμέ-

νων εἰς τὸν κύκλον τοῦτον καὶ τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος ν τῶν πλευρῶν διπλασιάζεται ἐπ' ἄπειρον.

Ἡ δευτέρα μέθοδος, εἰσαχθεῖσα ὑπὸ τοῦ Jacques Gregory, συνίσταται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἰδίου κύκλου, θεωρουμένης καὶ ταύτης ὡς κοινοῦ ὁρίου τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἰδίων ὡς καὶ προηγουμένως πολυγώνων καὶ ὁμοίως μεταβαλλομένων.

Ἡ τρίτη μέθοδος, καλουμένη ἡ τῶν *ἰσοπεριμετρικῶν* πολυγώνων, καὶ ἀποδιδομένη εἰς τὸν Schwab ἀλλὰ πράγματι ὀφειλομένη εἰς τὸν Descartes, ζητεῖ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀκτῖνος περιφερείας δοθέντος μήκους, θεωρουμένης τῆς ἀκτῖνος ταύτης ὡς κοινοῦ ὁρίου τῶν ἀκτίνων καὶ ἀποστημάτων μιᾶς ἀκολουθίας κανονικῶν πολυγώνων, ὡρισμένης περιμέτρου καὶ τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν συνεχῶς διπλασιάζεται.

Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην, δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν δύο ἰδιότητες, διατυπωθεῖσαι ὑπὸ τοῦ *Désiré André* καὶ τῶν ὁποίων τὴν ἀξίαν ἰδιαιτέρως ἐτόνισεν ὁ *Eugène Rouché* (N. A., 1882, σ. 325).

Ἡ τετάρτη μέθοδος, τοῦ *Legendre*, (IV Βιβλίον, XVI πρότασις) συνίσταται εἰς τὴν ἀνεύρεσιν τῆς ἀκτῖνος κύκλου δοθέντος ἐμβαδοῦ, θεωρουμένης πάλιν τῆς ἀκτῖνος ταύτης ὡς κοινοῦ ὁρίου τῶν ἀκτίνων καὶ ἀποστημάτων μιᾶς ἀκολουθίας κανονικῶν πολυγώνων, ὡρισμένου ἐμβαδοῦ καὶ τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν συνεχῶς διπλασιάζεται (N. A., 1844, σ. 582· σημείωσις τοῦ *Armand Farcy*).

Πρόβλημα 634

1750. **Δίδονται τὸ ἀπόστημα ρ καὶ ἡ ἀκτὶς R ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ζητοῦνται τὸ ἀπόστημα ρ′ καὶ ἡ ἀκτὶς R′ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ πρῶτον κανονικοῦ πολυγώνου καὶ διπλάσιον πλῆθος πλευρῶν ἔχοντος.**

Εἶναι αὐτά:

$$R' = \sqrt{\rho R}, \quad \rho' = R'\sqrt{\frac{R+\rho}{2R}}.$$

Παρατηρήσεις. 1) Διὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἐφαρμογὴν τῶν τύπων αὐτῶν, βλέπε § 1773 δ.

2) Διὰ τὰς λεπτομερείας τῶν ὑπολογισμῶν, βλέπε 2αν καὶ 3ην ἔκδοσιν τοῦ παρόντος ἔργου.

Πρόβλημα 634—I

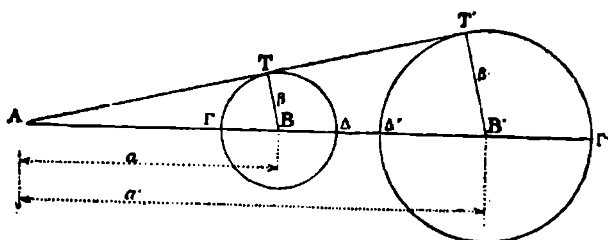
1751. **Ἔστω A ὁ πόλος ἀντιστροφῆς καὶ k^2 ἡ δύναμις αὐτῆς. Ἐὰν περιφερείας (B, β) τὸ κέντρον B ἀπέχῃ τοῦ πόλου A ἀπόστασιν α, νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἀκτὶς β′ τῆς ἀντιστρόφου τῆς (B) περιφερείας, ὡς καὶ ἡ ἀπόστασις α′ τοῦ κέντρου αὐτῆς B′ ἀπὸ τοῦ πόλου.**

Τὰ σημεῖα Γ, Γ′, Δ, Δ′ καὶ T, T′ εἶναι σημεῖα ἀντίστροφα ἀλλήλων, ἐνῷ τὸ κέντρον B′ δὲν εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ σημείου B. Πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν α′ καὶ β′, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ πρῶτον τὰ μήκη ΑΓ′ καὶ ΑΔ′.

$$ΑΓ' = \frac{k^2}{ΑΓ} = \frac{k^2}{\alpha - \beta}, \quad ΑΔ' = \frac{k^2}{ΑΔ} = \frac{k^2}{\alpha + \beta},$$

$$\alpha' = \frac{A\Gamma' + A\Delta'}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{k^2}{\alpha - \beta} + \frac{k^2}{\alpha + \beta}\right], \quad \alpha' = \frac{\alpha k^2}{\alpha^2 - \beta^2} \quad (1)$$

$$\beta' = \frac{A\Gamma' - A\Delta'}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{k^2}{\alpha - \beta} - \frac{k^2}{\alpha + \beta}\right], \quad \beta' = \frac{\beta k^2}{\alpha^2 - \beta^2} \quad (2)$$



Σχ. 1128.

Παρατήρησις. Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐχρησιμοποιοῦμεν ἐπίσης τὰ μήκη AT, AT', τουλάχιστον διὰ τὴν ἐπαλήθευσιν τῶν προηγουμένως εὑρεθέντων τύπων. Οὕτω:

$$AT' = \frac{k^2}{AT} = \frac{k^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \quad AT'^2 = \frac{k^4}{\alpha^2 - \beta^2},$$

ἀλλ' εἶναι

$$\alpha'^2 - \beta'^2 = \frac{\alpha^2 k^4 - \beta^2 k^4}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} = \frac{k^4}{\alpha^2 - \beta^2} = AT'^2.$$

Πρόβλημα 634—II

1751 α. **Ἔστω ΗΚΛΝ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν (O, R) καὶ περιγεγραμμένον εἰς τὴν (I, ρ). Εὕρετε τὴν σχέσιν τὴν συνδέουσαν τὰς ἀκτῖνας R καὶ ρ μετὰ τῆς διακέντρου δ = OI τῶν δύο περιφερειῶν.**

Χρησιμοποιοῦντες τὰς προτάσεις τῶν §§ 749 καὶ 1384 — 1392, ἐγγράφομεν εἰς τὴν περιφέρειαν (I) τετράπλευρον ΒΓΔΕ μὲ διαγωνίους ΒΑΔ, ΓΑΕ καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Ἔστω γ ἡ ἀπόστασις AI.

Ἐὰν εἰς τὰς κορυφὰς A, B, Γ, Δ φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας (I), γνωρίζομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΗΚΛΝ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν, τῆς ὁποίας ἔστω O τὸ κέντρον καὶ R ἡ ἀκτίς.

Ὁ τόπος τοῦ σημείου M, μέσου τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, εἶναι περιφέρεια, ἔχουσα κέντρον τὸ μέσον Z τῆς εὐθείας AI καὶ διερχομένη διὰ τοῦ P, προβολῆς τοῦ A ἐπὶ τὴν ΒΓ (§§ 749 καὶ 1386). Ἡ AM εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἴση ἑπομένως πρὸς τὴν ΜΓ, ἡ δὲ IMN κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ἄρα

$$IM^2 + M\Gamma^2 = 2IM^2 = I\Gamma^2 = \rho^2,$$

ἢ

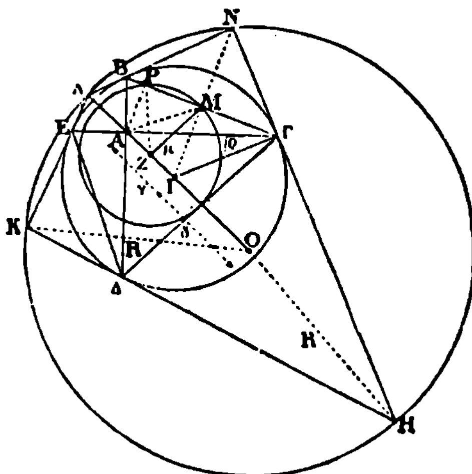
$$IM^2 = \frac{\rho^2}{2}.$$

'Επίσης

$$\mu^2 = ZM^2 = IM^2 - IZ^2 = \frac{\rho^2}{2} - \frac{\gamma^2}{4},$$

$$ZM = \frac{\sqrt{2\rho^2 - \gamma^2}}{2}.$$

'Αφ' ἑτέρου, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΙΓΝ εἶναι $IN = \frac{\rho^2}{IM}$· κατὰ συνέπειαν τὸ σημεῖον Ν δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀντίστροφον



Σχ. 1129.

τοῦ Μ ἐν τῇ ἀντιστροφῇ (Ι, ρ^2) καὶ γράφον τὴν ἀντίστροφον περιφέρειαν τῆς γραφομένης ὑπὸ τοῦ σημείου Μ.

'Εὰν ἤδη εἰς τοὺς τύπους (1) καὶ (2) τῆς § 1751 ἀντικαταστήσωμεν τὰ α', α, β' καὶ β διὰ τῶν δ, $\frac{\gamma}{2}$, R καὶ μ ἀντιστοίχως καὶ τὴν δύναμιν ἀντιστροφῆς k^2 διὰ τοῦ ρ^2, εὑρίσκομεν δύο σχέσεις μεταξὺ τῶν δ, ρ, R καὶ γ, δι' ἀπαλοιφῆς ἐκ τῶν ὁποίων τοῦ γ λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην σχέσιν μεταξὺ τῶν μηκῶν R, ρ καὶ δ.

Αἱ πράξεις δίδουν

$$\delta = \frac{\frac{\gamma}{2}\rho^2}{\frac{\gamma^2}{4} - \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\gamma^2}{4}\right)} = \frac{\gamma\rho^2}{\gamma^2 - \rho^2}, \qquad (3)$$

$$R = \frac{\frac{\rho^2\sqrt{2\rho^2 - \gamma^2}}{2}}{\frac{\gamma^2}{4} - \left(\frac{2\rho^2 - \gamma^2}{4}\right)} = \frac{\rho^2\sqrt{2\rho^2 - \gamma^2}}{\gamma^2 - \rho^2}. \qquad (4)$$

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (3) καὶ (4), λαμβάνομεν

$$\frac{\delta}{R} = \frac{\gamma\rho^2}{\rho^2\sqrt{2\rho^2-\gamma^2}},$$

ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τακτοποιοῦντες

$$2\rho^2\delta^2 = \gamma^2(R^2+\delta^2),$$

ἤ

$$\gamma^2 = \frac{2\rho^2\delta^2}{R^2+\delta^2}. \qquad (5)$$

Μεταφέροντες τέλος τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ γ^2 εἰς τὴν σχέσιν (3), ὑψωθεῖσαν προηγουμένως εἰς τὸ τετράγωνον, ὁδηγούμεθα τελικῶς εἰς τὴν σχέσιν

$$(\delta^2-R^2)^2 - 2\rho^2(R^2+\delta^2) = 0, \qquad (6)$$

ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

1751 β. Σημείωσις. 1) Τὰ προηγούμενα ζητήματα (§§ 1751 καὶ 1751 α) εἶναι περίληψις μιᾶς ἐνδιαφερούσης *Note de Géométrie* τοῦ R. Malloizel, καθηγητοῦ τότε εἰς *Saint-Barbe*. (*J. M. E.*, τῶν Bourget καὶ Kœhler, 1879, σ. 365). Προηγουμένως ὅμως ὁ J.-B. Durrande εἰς τὰ *A. d. G.*, τόμ. XV (1824 — 1825), σ. 133 — 145) εἶχε σπουδάσει τὸ ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον ταυτοχρόνως τετράπλευρον καὶ εἶχεν ἀνεύρει πολλὰ ἐνδιαφέροντα θεωρήματα, καθὼς καὶ τὸν θεμελιώδη τύπον

$$\delta^2 = R^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{4R^2+\rho^2},$$

λαμβανόμενον ἐκ τοῦ

$$\delta^4 - 2(R^2+\rho^2)\delta^2 + R^2(R^2-2\rho^2) = 0.$$

Ὁ τελευταῖος τύπος, γραφόμενος καὶ εἰς τὴν μορφὴν

$$(\delta^2-R^2)^2 = 2\rho^2\delta^2 + 2\rho^2R^2,$$

ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Malloizel.

2) Εἰς τὸ *Int. d. Math.* (1906, σ. 146) ἐτέθη τὸ ἑπόμενον πρόβλημα:

Ἐκ τῶν τετραπλεύρων τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων εἰς δύο περιφερείας (Ο), (Ι) καὶ τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα R, ρ καὶ δ πληροῦν τὴν σχέσιν (6), ποῖα τὰ *μεγίστης περιμέτρου* ἢ *μεγίστης ἐπιφανείας;* (E.-N. Barisien, H.-B. Mathieu).

Τὸ τετράπλευρον μεγίστης ἐπιφανείας καὶ ἐπομένως μεγίστης περιμέτρου $\left[\text{ἀφοῦ } (\text{ΗΝΛΚ}) = \frac{\text{ΗΝ}+\text{ΝΛ}+\text{ΛΚ}+\text{ΚΗ}}{2}.\rho\right]$, εἶναι τὸ ἔχον ἄξονα συμμετρίας τὴν διαγώνιον ἥτις διέρχεται διὰ τῶν κέντρων Ι καὶ Ο.

Τὸ τετράπλευρον *ἐλαχίστης ἐπιφανείας* εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον, μὲ βάσεις καθέτους ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΙΟ.

Πράγματι, τὸ *γινόμενον τῶν διαγωνίων* εἶναι σταθερὸν (*Leudersdorf*, N. A., 1879, σ. 479 καὶ 1880, σ. 470).

Ἂν μ, ν καὶ ω εἶναι αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν, εἶναι

$$\mu\nu = \frac{8R^2\rho^2}{R^2-\delta^2}.$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E = \frac{1}{2}\mu\nu\, \eta\mu\, \omega = \sigma\tau\alpha\theta. \times \eta\mu\, \omega.$$

τὸ μέγιστον τοῦ ἐμβαδοῦ του λαμβάνεται διὰ $\omega = 90^\circ$. Ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης τῶν διαγωνίων ἡ γωνία αὐτῶν ἐλαττοῦται, ἕως ὅτου τὸ τετράπλευρον ἀποβῇ τραπέζιον μὲ βάσεις καθέτους ἐπὶ τὴν διάκεντρον OI.

3) *Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου* O *ἀπὸ τῶν τεσσάρων πλευρῶν* εἶναι ἴσον πρὸς

$$\frac{\mu\nu}{2\rho} = \rho + \sqrt{\rho^2 + 4R^2}. \qquad \text{(J. Deprez)}$$

(*Mathesis*, τόμ. VIII, 1888, σ. 237, ζτμ. 608).

4) Βλέπε ἐπίσης εἰς N. A. τοῦ ἔτους 1882, σ. 330 τὴν σημείωσιν τοῦ P.-V. Sihaewen καὶ μάλιστα εἰς *J. d. M. El.* τοῦ *Longchamps*, τόμ. XXI, 1897, σ. 9 καὶ 174, μίαν σειρὰν ἄρθρων ἐπί: *Relations métriques et trigonométriques entre les Eléments linéaires et angulaires du quadrilatère inscrit complet*, ὑπὸ Lecoq. Εἰς τὴν σπουδὴν ταύτην ἐκτίθεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγραψίμου-περιγραψίμου τετραπλεύρου, ὁ τύπος τοῦ *Durrande*, ἐκεῖνος τοῦ Leudersdorf κλπ. (σ. 152, 154).

5) Εἰς τὸ *I. d. Math.* εὑρίσκονται διάφορα ἄρθρα ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος καὶ ἐπὶ τῶν ἐργασθέντων ἐπ' αὐτοῦ: 1907, σ. 20, πολὺ ὡραία μελέτη ὑπὸ Boutin — σ. 92, σημείωσις τῆς Συντάξεως ἐπὶ τοῦ ἰδίου θέματος — σ. 214, βιβλιογραφία ἐπὶ τοῦ *τετραπλεύρου τοῦ Poncelet* ὑπὸ Brocard. — 1908, σ. 233, σημείωσις ὑπὸ F. G.-M. καὶ τέλος 1909, σ. 36, ἓν ὡραῖον ἄρθρον ὑπὸ Welsch.

6) Ὁ Nicolas Fuss, τὸ 1792, ἐμελέτησε τὰ ἐγγράψιμα-περιγράψιμα τετράπλευρα καὶ ἔδωσε τὴν ἀναλυτικὴν σχέσιν τὴν συνδέουσαν τὰ μήκη R, ρ καὶ δ.

Ἀργότερον (1827), ὁ Steiner ἔφθασε εἰς τα ἴδια ἀποτελέσματα ὡς καὶ ὁ Fuss.

Ἐὰν θέσωμεν: $R + \delta = p$, $R - \delta = q$, ἡ σχέσις (6) γράφεται

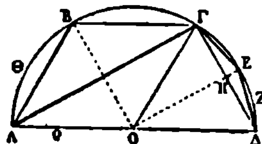
$$(p^2 - \rho^2)(q^2 - \rho^2) = \rho^4.$$

Journal de Crelle, (1828) ἄρθρον τοῦ Jacobi, καθηγητοῦ τότε εἰς Königsberg (κατὰ τὰ N. A., 1845, σ. 378, III-V).

Ἐπιφάνειαι μὲ μικτόγραμμον περίμετρον

Πρόβλημα 635

1752. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος μὲ χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἢ τριγώνου ἢ δωδεκαγώνου.



Σχ. 1130.

Ἔστω $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta$

καὶ $\Gamma E = E\Delta$.

AB εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, AΓ ἡ τοῦ τριγώνου καὶ ΔΓ ἡ τοῦ δωδεκαγώνου.

1) $$\text{κ. τομεὺς } ΑΟΒ = \frac{\pi R^2}{6},$$

$$\text{τρίγωνον } ΑΟΒ = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ὥστε:

$$\text{κ. τμῆμα } ΑΘΒ = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}). \qquad (\alpha)$$

2) $$\text{κ. τομεὺς } ΑΟΓΒ = 2 \text{ κ. τομ. } ΑΟΒΘ = \frac{\pi R^2}{3}$$

καὶ $$\text{τρ. } (ΑΟΓ) = \text{τρ. } (ΑΟΒ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ὥστε:

$$\text{κ. τμῆμα } ΑΒΓ = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}). \qquad (\beta)$$

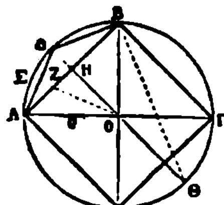
3) $$\text{κ. τομεὺς } ΟΔΖΕ = \frac{\pi R^2}{12}$$

καὶ $$\text{τριγ. } (ΔΟΕ) = \frac{1}{2} ΟΕ . ΔΗ = \frac{R^2}{4}.$$

Ὥστε: $$\text{κ. τμῆμα } ΔΖΕ = \frac{\pi R^2}{12} - \frac{3R^2}{12} = \frac{R^2}{12}(\pi - 3). \qquad (\gamma)$$

Πρόβλημα 695—Ι

1759. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τὰ ἐμβαδὰ τῶν κ. τμημάτων μὲ χορδὰς ἴσας πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν τετραγώνου ἢ κανονικοῦ ὀκταγώνου.



Σχ. 1131

1) $$\text{κ. τομεὺς } ΑΟΒΔ = \frac{\pi R^2}{4},$$

$$\text{τριγ. } (ΑΟΒ) = \frac{R^2}{2}.$$

ἄρα

$$\text{κ. τμῆμα } ΑΔΒ = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}(\pi - 2). \qquad (\delta)$$

2) Ἔστω ΑΔ = ΔΒ. Χωρὶς νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὸν γενικὸν τύπον, τὸν παρέχοντα τὴν πλευρὰν ΒΔ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανον. πολυγώνου $Π_{2ν}$ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ $Π_ν$ καὶ τῆς ἀκτῖνος R, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν αὐτὴν τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΒΘ. Εὑρίσκομεν:

$$ΟΗ = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad \text{ἑπομένως } ΔΗ = R - \frac{R}{2}\sqrt{2} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{2}),$$

$$ΒΔ^2 = ΔΗ . ΔΘ = 2R . \frac{R}{2}(2 - \sqrt{2}),$$

ἢ $$ΒΔ = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἀκολούθως τὸ ἀπόστημα ΟΖ· ἁπλούστερον ὅμως εἶναι νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΟΔ:

$$(ΑΟΔ) = \frac{1}{2}ΔΟ\,.\,ΑΗ = \frac{R}{2}\cdot\frac{R}{2}\sqrt{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}\,.$$

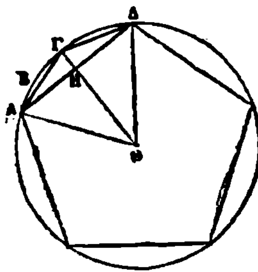
Καὶ ἐπειδὴ

$$\text{κ. τομεὺς } ΑΟΔΕ = \frac{\pi R^2}{8}\,,$$

ἕπεται:

$$\text{κ. τμῆμα } ΑΕΔ = \frac{\pi R^2}{8} - \frac{2R^2}{8}\sqrt{2} = \frac{R^2}{8}(\pi - 2\sqrt{2}). \qquad (\varepsilon)$$

Πρόβλημα 635—II



Σχ. 1132.

1754. **Νὰ ὑπολογισθοῦν ὁμοίως τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυκλικῶν τμημάτων μὲ χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ἢ τοῦ πενταγώνου.**

1) *Δεκάγωνον.*

$$\text{κ. τομεὺς } ΑΒΓΟ = \frac{\pi R^2}{10}\,.$$

Τὸ τρίγωνον ΑΟΓ ἔχει ὡς βάσιν τὴν ἀκτῖνα R καὶ ὕψος ΑΗ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου $=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Ἐπομένως:

$$\text{τριγ. } (ΑΟΓ) = \frac{ΓΟ\,.\,ΑΗ}{2} = \frac{R}{2}\cdot\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{R^2}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

καὶ

$$\text{κ. τμῆμα } ΑΒΓ = \frac{\pi R^2}{10} - \frac{R^2}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{R^2}{40}(4\pi - 5\sqrt{10-2\sqrt{5}}). \qquad (\zeta)$$

2) *Πεντάγωνον.*

$$\text{κ. τομεὺς } ΑΟΔΓ = \frac{\pi R^2}{5}\,,$$

$$\text{τριγ. } (ΑΟΔ) = ΑΗ\,.\,ΗΟ,$$

$$(\text{ἀπόστημα})^2 = ΗΟ^2 = R^2 - \frac{ΑΔ^2}{4} = R^2 - \frac{R^2}{16}(10-2\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{R^2}{16}(6+2\sqrt{5})$$

$$ΗΟ = \frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}.$$

Ἄρα

$$\text{τριγ. }(\text{ΑΟΔ}) = \text{ΑΗ}.\text{ΗΟ} = \frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

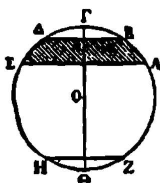
καὶ

$$\text{κ. τμῆμα ΑΓΔ} = \frac{\pi R^2}{5} - \frac{R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{R^2}{40}\left(8\pi - 5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right). \qquad (\eta)$$

Πρόβλημα 635—III

1755. Ἐμβαδὸν κυκλ. τμήματος μὲ δύο βάσεις ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν περιφέρειαν.



Σχ. 1133.

Τὸ κυκλικὸν τμῆμα μὲ δύο βάσεις ΑΒΔΕ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κ. τμημάτων ΑΒΓΕ καὶ ΒΓΔ:

$$\text{κ. τμῆμα ΑΒΓΕ} = R^2.\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}, \qquad (\S\ 1752,\ \beta)$$

$$\text{κ. τμῆμα ΒΓΔ} = R^2.\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}. \qquad (\S\ 1752,\ \alpha)$$

Ἄρα

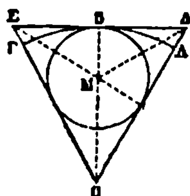
$$\text{κ. τμῆμα ΑΒΔΕ} = \frac{\pi R^2}{6}.$$

Ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ κυκλ. τμήματος κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Ο, θὰ πρέπει ἀπὸ ὁλοκλήρου τῆς περιφερείας νὰ ἀφαιρεθοῦν τὰ κ. τμήματα ΑΒΓΔΕ καὶ ΒΓΔ:

$$\text{κ. τμῆμα ΑΖΗΕ} = \pi R^2 - R^2\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right) - R^2\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right) =$$

$$= R^2\frac{\pi + \sqrt{3}}{2}.$$

Σημείωσις. Βλέπε καὶ τὸ ἐνδιαφέρον ζήτημα τῆς § 1718 α, περὶ τῆς μεγίστης ἐπιφανείας ἑνὸς κ. τμήματος μὲ μίαν βάσιν καὶ τόξον ὡρισμένου μήκους.



Σχ. 1134.

Πρόβλημα 636

1756. Ποία ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς κυκλικὸν τομέα ἀνοίγματος 60°;

Διὰ τὴν ἐγγραφὴν εἰς κ. τομέα περιφερείας, φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΒΕ εἰς τὸ μέσον Β τοῦ τόξου ΑΓΒ καὶ ὁρίζομεν αὐτὴν ὡς τὴν ἐγγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ τρίγωνον ΔΟΕ.

Ἐπειδὴ αἱ διχοτόμοι ΟΜ, ΔΜ, ΕΜ εἶναι ὕψη καὶ διάμεσοι ἐπίσης τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΔΟΕ, εὑρίσκομεν

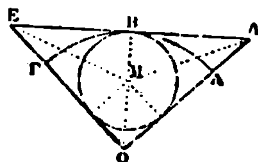
$$BM = \frac{1}{3} BO = \frac{R}{3} \cdot$$

ἄρα $$\text{ἐμβαδὸν κύκλου } M = \frac{\pi R^2}{9} \cdot$$

Πρόβλημα 636—Ι

1757. Ποία ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς κυκλ. τομέα ἀνοίγματος 90°;

$\Delta E = 2.OB = 2R$, $O\Delta = OE = R\sqrt{2}$.



Σχ. 1135.

Εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ σχήματος, ὅτι ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας (Μ) εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΕΟΔ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ, ἢ

$$2MB = 2R\sqrt{2} - 2R,$$

$$MB = R(\sqrt{2} - 1).$$

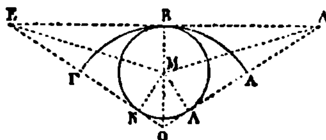
Ἑπομένως:

$$\text{ἐγγεγραμμένος κύκλος} = \pi R^2 (\sqrt{2} - 1)^2 = \pi R^2 (3 - 2\sqrt{2}).$$

Πρόβλημα 636—ΙΙ

1758. Ἀνάλογον πρόβλημα διὰ κυκλ. τομέα ἀνοίγματος 120°.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΛΜΝ τῶν ἀκτίνων εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι 60°, ἡ ΜΟ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ ὁποίου ἡ ΜΝ εἶναι τὸ ὕψος.



Σχ. 1136.

Ὥστε:

$$MO = \frac{2.MN}{\sqrt{3}} \cdot$$

Ἀλλ' εἶναι

$$OB = R = MN + \frac{2.MN}{\sqrt{3}} = MN \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

καὶ

$$MN = \frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot$$

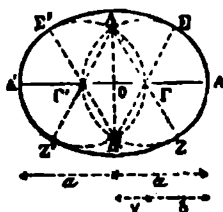
Κατὰ συνέπειαν:

$$\text{κύκλος } (M) = \pi R^2 \frac{3}{7+4\sqrt{3}} = \pi R^2 \frac{3(7-4\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})},$$

ἢ $$\text{κύκλος } (M) = 3\pi R^2 (7 - 4\sqrt{3}).$$

Πρόβλημα 637

1759. Διά τὴν κατασκευὴν τῆς ᾠοειδοῦς τοῦ σχ. 1137 διαιροῦμεν εὐθεῖαν ΑΑ' εἰς τρία ἴσα μέρη ΑΓ, ΓΓ', Γ'Α' καὶ γράφομεν μὲ κέντρα Γ, Δ', Γ' καὶ Δ τὰ κυκλικὰ καὶ ἐφαπτόμενα διαδοχικῶς τόξα ΖΑΕ, ΕΕ', Ε'Α'Ζ' καὶ Ζ'Ζ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπὸ τῆς κλειστῆς ταύτης γραμμῆς περικλειομένης ἐπιφανείας;



Σχ. 1137.

Ἡ ὅλη ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἴσων κυκλικῶν τομέων ΕΔ'Ε', ΖΔΖ' ἀνοίγματος 60° ἑκάστου, τῶν δύο, ἐπίσης ἴσων, κυκλ. τομέων ΖΓΕ, Ε'Γ'Ζ' ἀνοίγματος 120° ἑκάστου, ἠλαττωμένον κατὰ τὸν ρόμβον ΓΔΓ'Δ', δηλ. κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΓΔΓ' μὲ πλευρὰν ἴσην πρὸς $ΓΕ = ΓΑ = \frac{2α}{3}$. Ἐπομένως

$$Ε = \frac{1}{3}πΔΖ^2 + \frac{2}{3}πΓΖ^2 - 2\frac{δ^2}{4}\sqrt{3} \quad \left(δ = \frac{2α}{3}\right). \tag{1}$$

ἢ

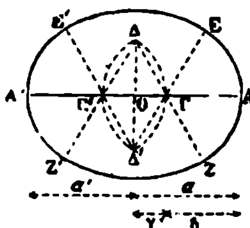
$$Ε = δ^2\left(2π - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{9}α^2\left(2π - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{2}$$

Παρατήρησις. Ἡ περίμετρος τῆς γραμμῆς εἶναι:

$$\frac{1}{3}π\,.\,ΔΖ + \frac{2}{3}π\,.\,ΓΖ = \frac{16\,πα}{9}.$$

Πρόβλημα 637—I

1760. Ἀνάλογον ζήτημα· $ΓΑ = Γ'Α' = δ$, $ΓΓ' = 2γ$.



Σχ. 1138.

Ὁ τύπος (1) ἐξακολουθεῖ ἰσχύων:

$$Ε = \frac{1}{3}π(2γ + δ)^2 + \frac{2}{3}πδ^2 - 2γ^2\sqrt{3}.$$

ἀφοῦ $$ΔΖ = 2γ + δ.$$

Πρόβλημα 638

1761. Ποία ἡ ἐπιφάνεια τῆς ᾠοειδοῦς τῆς λαμβανομένης διὰ διαιρέσεως τῆς ΑΑ′ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ καθ' ὅμοιον τρόπον πρὸς τὰς προηγουμένας κατασκευαζομένης;

Ἡ ἐπιφάνειά της ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων τεταρτοκυκλίων μὲ ἀκτῖνα

$$ΓΑ = ΓΟ = δ = \frac{α}{2},$$

ἐκ δύο ἄλλων, ἐπίσης ἴσων, μὲ ἀκτῖνα

$$ΔΖ = ΔΓ + ΓΖ = γ\sqrt{2} + δ = \frac{α}{2}(\sqrt{2}+1),$$

Σχ. 1139.

μεῖον τὸ τετράγωνον ΓΔΓ′Δ′. Ὥστε

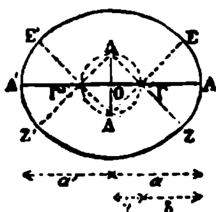
$$E = \frac{α^2}{4}[π(2+\sqrt{2}) - 2].$$

Παρατήρησις. Ἡ περίμετρος τῆς γραμμῆς εἶναι:

$$πΔΖ + πΓΖ = πδ(1+\sqrt{2}) + πδ = \frac{πα}{2}(2+\sqrt{2}).$$

Πρόβλημα 638—I

1762. Ἀνάλογον ζήτημα· τὸ σχῆμα ΓΔΓ′Δ′ εἶναι τετράγωνον πάλιν ἀλλὰ $γ \neq δ$.



Σχ. 1140.

Εὑρίσκομεν $E = \frac{1}{2}π(γ\sqrt{2}+δ)^2 + \frac{1}{2}πδ^2 - 2γ^2.$

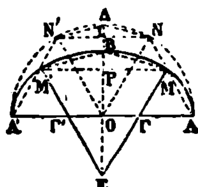
Πρόβλημα 638—II

1763. Ποία ἡ ἐπιφάνεια τῆς *λαβῆς κανίστρου* (91), τῆς ἀποτελουμένης ἐκ τριῶν τόξων 60° καὶ ἐχόντων κέντρα τὰ σημεῖα Γ, Ε καὶ Γ′ κατὰ τὸ σχῆμα 1141;

---

91. Σημ. μετ. Anse de panier, ἐκ τοῦ λατινικοῦ ansa = λαβή, ὠτίον δοχείου κλπ.

Ἔστω ΑΑ' = 2α καὶ βέλος ΟΒ = β < α.
Ὑπενθυμίζομεν τὴν κατασκευὴν τῆς καμπύλης.
Γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ΑΔΑ', ἐγγράφομεν εἰς αὐτὴν κανονικὸν ἡμιεξάγωνον ΑΝΝ'Α' καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΝ, ΔΝ'. Διὰ τοῦ σημείου Β φέρομεν παράλληλον ΒΜ πρὸς τὴν ΔΝ, ΜΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΝΟ κλπ.



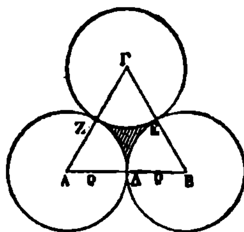
Σχ. 1141.

Τὰ τρίγωνα ΑΜΓ, ΜΕΜ', Α'Μ'Γ' εἶναι ἰσόπλευρα, τὰ δὲ σημεῖα Γ, Ε, Γ' εἶναι κέντρα τῶν τόξων ΑΜ, ΒΜ' καὶ Μ'Α' ἀντιστοίχως.

Ἡ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἐκ τριῶν κ. τομέων ἀνοίγματος 60° ἑκάστου, μεῖον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΓΕΓ'. Καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ μέτρου της ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ΑΓ καὶ ΕΜ συναρτήσει τῶν α καὶ β ([92]).
Βλέπε 2αν καὶ 3ην ἔκδοσιν τοῦ παρόντος ἔργου.

Πρόβλημα 639

1764. Δίδονται τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένης ἐπιφανείας.



Σχ. 1142.

Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ μεῖον τὸ ἄθροισμα τριῶν κυκλ. τομέων, ἴσων ἑκάστου πρὸς τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ ἑνὸς τῶν ἴσων κύκλων.

Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν

$$\frac{1}{4}AB^2\sqrt{3} = \rho^2\sqrt{3}$$

---

92. Σημ. μετ. Ὑποδεικνύομεν ἕνα τρόπον ὑπολογισμοῦ τῶν μηκῶν τούτων.

Ἔστω Η ἡ τομὴ τῶν ΒΜ καὶ ΟΝ, Σ ἡ τομὴ τῆς ἐκ τοῦ Ο παραλλήλου τῆς ΑΝ μετὰ τῆς ΕΜ. Θὰ ἔχωμεν:

$$OB = 6 = OH.$$

Ἂν τεθῇ ΝΜ = x, τὸ παραλληλόγραμμον ΟΝΜΣ δίδει ΜΣ = R, ἐκ δὲ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΣΕ, μὲ πλευρὰς ΟΣ = ΣΕ = x καὶ γωνίας εἰς τὰ Ο καὶ Ε ἴσας πρὸς 30°, λαμβάνομεν ἀμέσως:

$$OE = x\sqrt{3}.$$

Ἐπομένως:

$$x\sqrt{3} + 6 = OB = OM = x + R, \quad x = \frac{R - 6}{\sqrt{3} - 1}$$

καὶ

$$EM = R + x = \frac{R\sqrt{3} - 6}{\sqrt{3} - 1},$$

$$A\Gamma = AM = M\Gamma = R - x = \frac{6 - R(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - 1}.$$

καὶ οἱ τρεῖς τομεῖς ἔχουν ἄθροισμα $3 \cdot \frac{\pi\rho^2}{6} = \frac{\pi\rho^2}{2}$. Ὥστε:

$$(\Delta EZ) = \rho^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Πρόβλημα 639—I

1765. Δίδονται τέσσαρες ἴσαι, ἐφαπτόμεναι ἀνὰ τρεῖς, περιφέρειαι καὶ τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τούτων περιεχομένης ἐπιφανείας.

Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς τῶν περιφερειῶν. Ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῶν κέντρων θὰ πρέπει νὰ ἀφαιρεθοῦν τέσσαρες κ. τομεῖς ἀνοίγματος 90°. Ὥστε

$$E = 4\rho^2 - 4 \cdot \frac{\pi\rho^2}{4} = \rho^2 (4 - \pi).$$

Πρόβλημα 639—II

1766. Τὰ κέντρα τεσσάρων ἴσων κύκλων, ἐφαπτομένων ἀνὰ δύο, εἶναι κορυφαὶ ρόμβου, μὲ πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν τῶν διαγωνίων. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένης ἐπιφανείας συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος ρ τῶν κύκλων.

1) Ὁ ρόμβος ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἰσοπλεύρων τριγώνων πλευρᾶς 2 ρ.
Ἑπομένως:

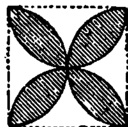
$$\text{Ρόμβος} = 2 \cdot \frac{(2\rho)^2 \sqrt{3}}{4} = 2\rho^2 \sqrt{3}.$$

2) Ἀπὸ τοῦ ρόμβου θὰ πρέπει νὰ ἀφαιρεθοῦν δύο κυκλικοὶ τομεῖς ἀνοίγματος 60° καὶ δύο ἄλλοι ἀνοίγματος 120°, ἤτοι; ἐν ὅλῳ, εἷς ὁλόκληρος ἐκ τῶν θεωρουμένων κύκλων.
Ὥστε

$$E = 2\rho^2 \sqrt{3} - \pi\rho^2 = \rho^2 (2\sqrt{3} - \pi).$$

Πρόβλημα 640

1767. Μὲ κέντρα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ γράφομεν ἡμιπεριφερείας. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τεσσάρων οὕτω σχηματιζομένων φύλλων.


Σχ. 1143.

Ἔστω 2 ρ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.
Τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἡμικυκλίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον; πλέον τὰ τέσσαρα ταῦτα φύλλα· ἢ

$$E = 2\pi\rho^2 - 4\rho^2 = 2\rho^2 (\pi - 2).$$

Παρατήρησις. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς λευκῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος 1143 — *Σταυροῦ τῆς Μάλτας* — εἶναι

$$E' = \text{τετράγωνον} - E = 2\rho^2 (4 - \pi).$$

1768. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΜΒΝ καὶ τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον ΜΑΝ ἔχουν κοινὴν βάσιν ΜΝ καὶ τὰς κορυφὰς Β, Α πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΜΝ. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς Β, Α καὶ ἀκτῖνας ΒΝ καὶ ΑΝ ἀντιστοίχως γράφομεν περιφερείας. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχηματιζομένων τριῶν καμπυλογράμμων χωρίων.

Σχ. 1144.

Θὰ πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν κατὰ πρῶτον τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΜΓΝ καὶ ΜΔΝ.

Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον τμῆμα ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον 60°, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι

$$\frac{\beta^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}), \quad (\S\ 1752\,\alpha) \quad (1)$$

τοῦ δὲ δευτέρου, ἀντιστοιχοῦντος εἰς τόξον 90°, τὸ

$$\frac{\alpha^2}{4}(\pi - 2) = \frac{\beta^2}{8}(\pi - 2), \quad (2)$$

ἀφοῦ

$$\alpha = \frac{\beta\sqrt{2}}{2}.$$

Ἐπομένως:

$$\text{μηνίσκος ΜΓΝΔ} = (2) - (1) = \frac{\beta^2}{24}[-\pi + 6(-1 + \sqrt{3})] =$$

$$= \frac{\alpha^2}{12}[-\pi + 6(-1 + \sqrt{3})]. \quad (3)$$

2) Τὸ κοινὸν μέρος ΜΓΝΖ τῶν δύο περιφερειῶν ἔχει ἐμβαδὸν

$$\pi\alpha^2 - (3).$$

3) Ὁ μηνίσκος, τέλος, ΜΕΝΖ ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο κύκλων πλέον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μηνίσκου ΜΓΝΔ.

Θεώρημα 640—II

1768 α. Συμπληρωματικὸν τοῦ θεωρήματος (§ 1577) ἐπὶ τῶν μηνίσκων τοῦ *Ἱπποκράτους*.

1) Ὁ εἰς ἕκαστον τῶν μηνίσκων (σχ. 1144 α) ἐγγραφόμενος μέγιστος κύκλος ἔχει διάμετρον τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

2) Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸν μέγιστον κύκλον, τὸν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ κοινὸν μέρος τῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

3) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν μηνίσκων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης ΗΚ τῶν δύο μηνίσκων.

Ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς $(\beta + \gamma) - \alpha$ (§ 741). Ὥστε:

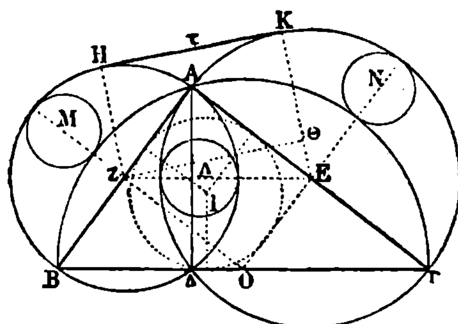
$$\text{διάμετρος κύκλου Μ} = \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}.$$

$$\text{διάμετρος κύκλου } N = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}\,.$$

$$\text{διάμετρος κύκλου } \Lambda = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \quad \text{ἐπίσης.}$$

$$\tau^2 = Z\Theta^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right)^2 = \frac{\beta\gamma}{2}\,.$$

Εἶναι δηλ. τὸ τετράγωνον τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης τ ἴσον πρὸς



Σχ. 1144 α

τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἴσον δηλαδὴ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο μηνίσκων.

Σημείωσις. Τὰ θεωρήματα 1 καὶ 3 εἶναι τοῦ G. Lemaire· τὸ δεύτερον ἀνήκει εἰς τὸν H. Brocard. (*I. d. Math.*, 1909, σ. 195, ζήτ. 3006· 1910, σ. 252· 1911, σ. 9 καὶ 10).

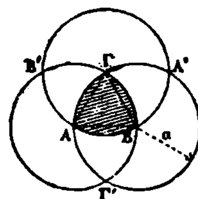
Εἰς τὸ αὐτὸ περιοδικὸν (1906), παρέχονται διάφοροι βιβλιογραφικαὶ ὑποδείξεις, ὡς ἀπάντησις εἰς τὸ ζήτημα 3009 τοῦ Wieleitner. Βλέπε κυρίως τὸ ἄρθρον τοῦ Brocard καὶ τὰς σημειώσεις τῶν Braid καὶ Plakhovo. (*I. d. Math.*, 1906, σ. 33, ζήτ. 3009· σ. 133 καὶ 223, ἀπαντήσεις).

Εἰς τὴν *Géométrie grécque* τοῦ Paul Tannery ἀναφέρονται οἱ *Μηνίσκοι* (σ. 118, n° 18).

Ἡ ἀνωτέρω Σημείωσις συμπληρώνει ἐκείνην τῆς § 1577 α.

Πρόβλημα 641

1769. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τριγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἀκτῖνας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ γράφομεν περιφερείας. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου καμπυλογράμμου τριγώνου, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.



Σχ. 1145.

1) Τὸ χωρίον τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, ηὐξημένου κατὰ τρία ἴσα κ. τμήματα ἀνοίγματος 60° ἑκάστου (§ 1752).

Ἐπομένως :

$$\chi\omega\rho.\ AB\Gamma = \frac{\alpha^2}{4}\sqrt{3} + \alpha^2 \cdot \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\alpha^2}{2}(\pi - \sqrt{3}).$$

2) Ἐπίσης, τὸ χωρίον αὐτὸ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενον ἐκ τριῶν ἴσων κυκλ. τομέων ἀνοίγματος 60°, μεῖον τὸ διπλάσιον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου — ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἐξ ἑνὸς ἡμικυκλίου μεῖον τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου. Εὑρίσκομεν καὶ πάλιν

$$\chi\omega\rho.\ (AB\Gamma) = \frac{\pi\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\sqrt{3} = \frac{\alpha^2}{3}(\pi - \sqrt{3}). \qquad (1)$$

1769 α. ***Σημείωσις.*** Δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν τὸ ἀνώτερω πρόβλημα.

Περιγράφοντες περιφέρειαν (K, R) *εἰς τὰς τρεῖς περιφερείας* (A), (B), (Γ), *εὑρίσκομεν τρεῖς τριάδας καμπυλογράμμων τριγώνων, ὡς τὸ* BA′Γ *ἢ τὸ* A′BΓ′ *ἢ τὸ* B″A′Γ″, *ὅπου* B″, Γ″ *τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς περιφερείας* (K) *μεθ' ἑκάστης τῶν περιφερειῶν* (B) *καὶ* (Γ).

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν χωρίων τούτων.

(H. Brocard).

$$R = \alpha\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

1) $$\chi\omega\rho.\ (BA'\Gamma) = \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \sqrt{3}\right).$$

2) $$\chi\omega\rho.\ (A'B\Gamma') = \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\right).$$

3) $$\chi\omega\rho.\ (B''A'\Gamma'') = \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

(*Mathesis*, 1899, σ. 100, ζήτ. 1176).

Πρόβλημα 641—I

1770. **Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ΑΓ′ΒΑ′ΓΒ′Α (σχ. 1145).**

Τοῦτο εἶναι τὸ τριπλάσιον τοῦ κοινοῦ μέρους ΑΒΑ′Γ τῶν περιφερειῶν (Β) καὶ (Γ), ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ καμπυλογράμμου τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ χωρίον ΑΒΑ′Γ εἶναι διπλάσιον τοῦ (μικροτέρου) κ. τμήματος τοῦ ἔχοντος χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἰς τὴν περιφέρειαν (Β) ἢ (Γ), συμπεραίνομεν ὅτι (§ 1752 β):

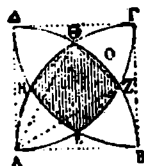
χωρίον (ΑΓ′ΒΑ′ΓΒ′Α) = ἑξαπλάσιον κ. τμήματος 120° — διπλάσιον καμπυλογράμμου τριγώνου, ἢ

$$(A\Gamma'BA'\Gamma B'A) = \frac{\alpha^2}{2}(4\pi - 3\sqrt{3}) - \frac{2\alpha^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) = \frac{\alpha^2}{2}(2\pi - \sqrt{3}). \qquad (2)$$

Εἶναι δηλ. τὸ ἐν λόγῳ χωρίον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ καμπυλόγραμμον τρίγωνον ΑΒΓ, ηὐξημένον κατὰ ἕνα ἡμικύκλιον ἀκτῖνος α.

Πρόβλημα 642

1771. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ γράφομεν περιφερείας, τεμνομένας ἀνὰ δύο κατὰ τά, ἐσωτερικῶς τοῦ τετραγώνου κείμενα, σημεῖα Ε, Ζ, Θ, Η. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου τετραπλεύρου ΕΖΘΗ.



Σχ. 1146.

Γνωρίζομεν ὅτι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω κατασκευήν, τὸ τόξον ΔΘΖΒ διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη (§ 910).

Ἀποτελεῖται ἐπομένως τὸ ἐν λόγῳ χωρίον ἐκ τοῦ τετραγώνου μὲ πλευρὰν ΖΘ, ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ καν. δωδεκαγώνου, τοῦ ἐγγραφομένου εἰς μίαν τῶν γραφεισῶν περιφερειῶν, καὶ ἐκ τεσσάρων ἴσων κυκλ. τμημάτων, ὡς τὸ ΖΟΘ, ἐχόντων ὡς χορδὴν τὴν πλευρὰν ταύτην.

Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ τοῦ δωδεκαγώνου εἶναι ἴση πρὸς $\alpha\sqrt{2-\sqrt{3}}$, τὸ τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν $\alpha^2(2-\sqrt{3})$ καὶ τὸ κυκλ. τμῆμα

$$ZO\Theta=\alpha^2\,\frac{\pi-3}{12}.$$

Ἐπομένως

$$\chi\omega\rho.\,(EZ\Theta H)=\alpha^2(2-\sqrt{3})+4\cdot\frac{\alpha^2}{12}(\pi-3)=\alpha^2\left(\frac{\pi+3(1-\sqrt{3})}{3}\right).\quad(1)$$

Παρατήρησις. Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ καμπυλογράμμου τριπλεύρου ΓΘΟΖ, παρατηροῦμεν ὅτι

$$\chi\omega\rho.\,(\Gamma\Theta OZ)=\frac{\chi\omega\rho.\,(AFZ\Gamma\Theta HA)-\chi\omega\rho.\,(EZ\Theta H)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\alpha^2\left(\frac{\pi-2}{2}\right)-\alpha^2\left(\frac{\pi+3(1-\sqrt{3})}{3}\right)\right].$$

Πρόβλημα 642—I

1772. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς 2 μ. καὶ ἀκτῖνα 1 μ. γράφομεν περιφερείας ἐφαπτομένας ἀνὰ δύο. Ζητεῖται: 1) Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο περιφέρειαι, αἵτινες ἐφάπτονται αὐτῶν ἐξωτερικῶς καὶ ἐσωτερικῶς, 2) νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν τελευταίων τούτων περιφερειῶν καὶ 3) νὰ συγκριθῇ ὁ γεωμετρικὸς μέσος τῶν μηκῶν τῶν δύο ἀκτίνων πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ἀρχικὸν τρίγωνον. (Baccalauréat, 1857).

Διὰ τὴν γενικὴν λύσιν, καλέσωμεν α τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

1) Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ τριγώνου. Αἱ ΟΔ καὶ ΟΙ εἶναι αἱ δύο ζητούμεναι ἀκτῖνες καὶ ΟΜ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

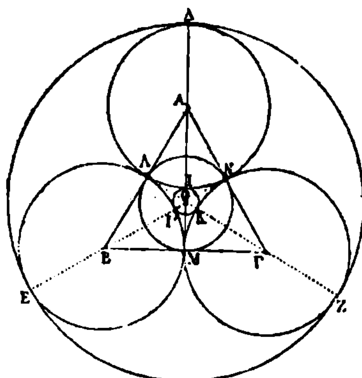
2) Γνωρίζομεν ὅτι:

$$AM=\frac{\alpha}{2}\sqrt{3},\quad AO=\frac{2}{3}AM,\quad AO=\frac{\alpha}{3}\sqrt{3}.$$

$$O\Delta = AO + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{3}\sqrt{3} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{6}(2\sqrt{3}+3). \quad (1)$$

$$OI = AO - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{6}(2\sqrt{3}-3). \quad (2)$$

$$\text{Γεωμ. μέσος τῶν ἀκτίνων} = \sqrt{\frac{\alpha}{6}(2\sqrt{3}+3)\cdot\frac{\alpha}{6}(2\sqrt{3}-3)} = \frac{\alpha}{6}\sqrt{3}.$$



Σχ. 1147.

3) $$OM = \frac{AM}{3} = \frac{\alpha}{6}\sqrt{3}.$$

Ὥστε :

$$OM = \sqrt{O\Delta \cdot OI}.$$

Παρατήρησις. Διὰ $\alpha = 2$ μ., ἔχομεν:

$$O\Delta = \frac{1}{3}(2\sqrt{3}+3)\,\mu., \quad OI = \frac{1}{3}(2\sqrt{3}-3)\,\mu.$$

1772 α. Σημείωσις. Διὰ τρεῖς περιφερείας μὲ κέντρα Α, Β, Γ ἀκτῖνας α, β, γ καὶ ἐφαπτομένας ἀλλήλων ἀνὰ δύο, ἡ ἀκτὶς ρ_1, τῆς διὰ τῶν τριῶν σημείων ἐπαφῆς περιφερείας καὶ ἡ ἀκτὶς ρ_2 τῆς περιφερείας διὰ τῶν τριῶν κέντρων εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}, \quad \rho_2 = \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{4\sqrt{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}}.$$

(*An. d. Gerg.*, τόμ. V (1814 - 15), σ. 32, λύσις ὑπὸ J. - B. Durrande, σ. 301· *N. An.*, 1876, σ. 318, Aubert· *Mathesis*, 1896, σ. 33 καὶ 60, ὡραία μελέτη ὑπὸ E. - N. Barisien).

Θεώρημα 642—II

1772 β. Ἔστωσαν τρεῖς περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων ἐξωτερικῶς. Ἂν ϱ_1, ϱ_2 εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν, αἵτινες ἐφάπτονται

αὐτῶν καὶ ϱ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον τῶν κέντρων τῶν τριῶν πρώτων περιφερειῶν, συμβαίνει

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{4}{\rho} \qquad \text{(E. - N. Barisien).}$$

(*Mathesis*, 1905, σ. 136, ζήτ. 1501, σχ. σημείωσις κατὰ τὸν Plakhowo. Ἐπίσης *J. M. S.*, 1890, σ. 265, Lauvernay).

Τόπος 642—III

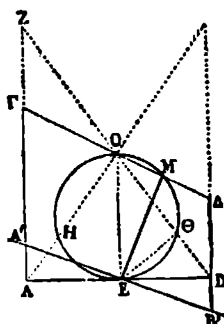
1773. Εἰς τὰ δύο ἄκρα εὐθείας ΑΒ ὑψοῦμεν καθέτους ἐπ' αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῶν μήκη ΑΓ, ΒΔ μεταβλητὰ μὲν ἀλλὰ τοιαῦτα, ὥστε τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ νὰ ἔχῃ ὡρισμένον ἐμβαδὸν k^2. Εὕρετε τὸν τόπον τοῦ ποδὸς Μ τῆς ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καθέτου ΕΜ ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ΑΒ.

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ ΑΓ, ΒΔ *παραλλήλους πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν.* (*Concours général* τοῦ 1880).

1) Ἔστω ΟΕ ἡ μέση βάσις τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι

$$k^2 = AB \,.\, OE\cdot$$

ἄρα: $$OE=\frac{k^2}{AB}=\text{σταθ.},$$



Σχ. 1148.

καὶ διέρχεται ἑπομένως ἡ εὐθεῖα ΓΔ διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου Ο.

Κατὰ συνέπειαν, ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΟΕ.

Παρατήρησις. 1) Τὸ τρίγωνον ΑΒΖ εἶναι ἡ ὁριακὴ μορφὴ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ἑπομένως, ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο συμμετρικῶν τόξων ΟΘ, ΟΗ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΟΕ.

2) Ἔστω Α'Β' ἡ δοθεῖσα σταθερὰ πλευρά, Α'Γ, Β'Δ αἱ παραλλήλως πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν πλευραὶ τοῦ τραπεζίου. Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΕΒ ἐπὶ τὰς βάσεις, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως:

$$AB\,.\,OE=k^2,\quad OE=\frac{k^2}{AB}=\text{σταθ.},$$

καὶ ὁ τόπος θὰ εἶναι πάλιν τόξα τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΟΕ.

Διάφορα ζητήματα

Πρόβλημα 642—IV

1773 α. Λαμβάνοντες ὡς ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους, ὑπολογίσατε τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, κατόπιν τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ ἀπόστημα τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ἰσοπεριμετρικῶν πρὸς

αὐτὸ καὶ ἐχόντων 12, 24, 48, 96... πλευρὰς καὶ συναγάγετε ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων μίαν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ π.

Ἔστωσαν ρ καὶ R τὸ ἀπόστημα καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἑξαγώνου, ρ', R' τὸ ἀπόστημα καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ δωδεκαγώνου, ρ'', R'' τὰ ἴδια μήκη διὰ τὸ εἰκοσιτετράγωνον κ.ο.κ. Οἱ τύποι τοῦ Schwab (G., n° 289), θὰ χρησιμεύσουν ὡς βάσις τῶν ὑπολογισμῶν:

$$\rho = \frac{\rho + R}{2}, \quad R' = \sqrt{\rho' R}\,.$$

Ὁ ἑπόμενος πίναξ παρέχει τὰ ἐν λόγῳ μήκη μέχρι τοῦ καν. πολυγώνου μὲ 768 πλευρὰς καὶ τῇ βοηθείᾳ πενταψηφίων λογαριθμικῶν πινάκων.

Πλευραὶ	Ἀποστήματα	Ἀκτῖνες
6	0,866025...	1,000000
12	0,933012...	0,965930...
24	0,949471...	0,957660...
48	0,953565...	0,955600...
96	0,954582...	0,955090...
192	0,954836...	0,954962...
384	0,954899...	0,954925...
768	0,954912...	0,954925...

Ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας τῆς αὐτῆς περιμέτρου δύναται νὰ θεωρηθῇ περιλαμβανομένη μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος τοῦ τελευταίου πολυγώνου. Ἂν ὡς τιμὴν αὐτῆς λάβωμεν τὸν μέσον ἀριθμητικὸν τῶν δύο τούτων μηκῶν, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι περιφερείας μήκους 6 μ. ἡ ἀκτίς της εἶναι 0,954918... μ. Τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας εἶναι 2πρ καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας πρ. Ἑπομένως

$$\pi\,.(0{,}954918...) = 3, \quad \text{ὅθεν} \quad \pi = \frac{3}{0{,}954918...} = 3{,}14157...$$

ἢ

$$\pi = 3{,}1416...$$

ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς τέσσαρα μόνον δεκαδικὰ ψηφία.

Πρόβλημα 642—V

1773β. Ἐφαρμόσατε διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ π τοὺς τύπους τοῦ Saurin (§ 1458)

$$T' = \frac{2\,\tau T}{\tau + T}, \quad \tau' = \sqrt{\tau T'},$$

ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 1 μέτρου.

Ἡ *μέθοδος τῶν περιμέτρων*, ὀφειλομένη εἰς τὸν *Ἀρχιμήδη*, ἤγαγεν τὸν Saurin εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους.

Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς εἶναι 1, ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι $\sqrt{2}$ καὶ ἡ περίμετρός του $4\sqrt{2}$. Ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι 2 καὶ ἡ περίμετρός του 8. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν κατὰ πρῶτον:

$$\tau = 4\sqrt{2}, \quad \text{καὶ} \quad T = 8.$$

Ἐκτελοῦντες τοὺς ὑπολογισμοὺς τῇ βοηθείᾳ λογαρίθμων μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία, ἀγόμεθα εἰς τὸν πίνακα:

Πλευραὶ	T	τ
4	8,000000	$4\sqrt{2}$
8	6,62742..	6,12300...
16	6,36514...	6,24286...
32	6,30336...	6,27300
64	6,28857...	6,28079...
128	6,28454...	6,28257...
256	6,28343...	6,28300
512	6,28329...	6,28314...
1024	6,28321...	6,28314...

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν περιφέρειαν περιλαμβανομένην μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων περιμέτρων, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν:

Μῆκος περιφερείας ἀκτῖνος 1 μ. . . . . 6,28318... μ.
Διαιροῦντες διὰ τῆς διαμέτρου . . . . 2,00000 μ.
Εὑρίσκομεν διὰ τιμὴν τοῦ π = ... 3,14159... μ.

Πρόβλημα 642—VI

1773 γ. Ἐφαρμόσατε διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ π τοὺς τύπους τοῦ Gregory (§ 1748)

$$\alpha' = \sqrt{\alpha A}\,, \quad A' = \frac{2\,\alpha A}{\alpha + \alpha'}\,,$$

ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 1 μέτρου.

Οἱ ἀνωτέρω τύποι ἐπιτρέπουν τὸν διαδοχικὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐμβαδῶν τῶν κανονικῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων πολυγώνων μὲ 8, 16, 32... πλευράς.

Ἐπειδή, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων τούτων αὐξάνῃ συνεχῶς, ταῦτα τείνουν πρὸς τὴν περιφέρειαν, τὰ ἐμβαδά των θὰ ἔχουν ὅριον τὴν τιμὴν $\pi\rho^2$ ἤ, διὰ ρ=1, τὸν ἀριθμὸν π.

Οὕτω, ὑπολογίζοντες τὰ ἐμβαδὰ τῶν διαδοχικῶν πολυγώνων, δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ἕνας ἐνδιάμεσος ἀριθμὸς μεταξὺ ἐκείνων οἵτινες ἐκφράζουν τὰ ἐμβαδὰ ἑνὸς ἐγγεγραμμένου καὶ ἑνὸς περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν. Ἐὰν λοιπὸν οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ ἔχουν κοινά, πρὸς τ' ἀριστερά, δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ψηφία ταῦτα θὰ ἀνήκουν κατ' ἀνάγκην εἰς τὸν ἀριθμὸν π.

Οἱ ἀνωτέρω τύποι εἶναι ἀνάλογοι ἐκείνων τοῦ Saurin καὶ ἀναλόγως ἐπίσης γίνεται καὶ ὁ λογαριθμικὸς λογισμός. Καὶ εἰς τὰς δύο ὅμως περιπτώσεις ἐμφανίζεται ἡ λογιστικὴ δυσκολία τῶν πολυαρίθμων μεταβάσεων ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς λογαρίθμους καὶ τἀνάπαλιν.

Τῆς δυσκολίας ταύτης ἀπαλλασσόμεθα, θεωροῦντες ὄχι τὰς ποσότητας ταύτας καθ' ἑαυτὰς ἀλλὰ τὰ ἀντίστροφά των.

Ὡς γνωστὸν τὸ γινόμενον δύο ἀντιστρόφων ἀριθμῶν εἶναι 1 καὶ ὁ γεωμετρικός των μέσος πάλιν 1.

Ἔστωσαν Α, Β, Γ, Δ τέσσαρες ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε:

$$\Gamma = \sqrt{AB}\,, \quad \Delta = \frac{2AB}{A+\Gamma}\,, \tag{1}$$

καὶ α, β, γ, δ οἱ ἀντίστροφοι τῶν Α, Β, Γ, Δ. Θὰ ἔχωμεν:

$$A = \frac{1}{\alpha}\,, \quad B = \frac{1}{\beta}\,, \quad \Gamma = \frac{1}{\gamma}\,, \quad \Delta = \frac{1}{\delta}$$

καὶ ἡ πρώτη τῶν σχέσεων (1) γράφεται

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\,.$$

Ἐπομένως, $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$ ἤ: *Ἐὰν ἐκ τριῶν ἀριθμῶν ὁ εἷς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς μέσος τῶν ἄλλων δύο, ἡ αὐτὴ σχέσις ὑφίσταται καὶ μεταξὺ τῶν ἀντιστρόφων των.*

Ἡ δευτέρα τῶν σχέσεων (1) γράφεται ἐπίσης:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{2\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}} \quad \text{ἢ} \quad \delta = \frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}}{2\cdot\frac{1}{\alpha\beta}}\,,$$

ἢ καὶ

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right).$$

Ἀλλ' εὕρομεν ὅτι $\gamma^2 = \alpha\beta$· ἄρα:

$$\delta = \frac{1}{2}(\beta+\gamma),$$

εἶναι δηλ. ὁ δ ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν β καὶ γ.

Ἐπειδὴ αἱ σχέσεις τὰς ὁποίας ὑπεθέσαμεν συνδεούσας τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἐκεῖναι ἀκριβῶς, αἵτινες συνδέουν τὰς τέσσαρας ποσότητας α, Α, α', Α':

$$\alpha' = \sqrt{\alpha A}\,, \quad A' = \frac{2\alpha A}{\alpha + \alpha'}\,.$$

Ἕπεται ὅτι *ἐὰν συμφωνήσωμεν νὰ παριστῶμεν διὰ τῶν ἰδίων τεσσάρων γραμμάτων τὰ ἀντίστροφα, τῶν ἀρχικῶν ἀριθμῶν*, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$\alpha' = \sqrt{\alpha A} \quad \text{καὶ} \quad A' = \frac{A+\alpha'}{2}\,.$$

Ὁ ὑπολογισμὸς οὕτω ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν ἀριθμητικῶν καὶ γεωμετρικῶν, ἐναλλάξ, μέσων.

Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας θὰ εὕρωμεν διὰ τὰ τ' αἱ Τ' θὰ τείνουν πρὸς τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἀριθμοῦ π.

Οἱ ἀντίστροφοι ἀριθμοὶ τῶν ἐμβαδῶν τῶν πολυγώνων

Πλευραί	α	A
4	0,500000	0,025000
8	0,353550...	0,031775...
16	0,326638...	0,314206...
32	0,320365...	0,317285...
64	0,318823...	0,318054...
128	0,318439...	0,318246...
256	0,318342...	0,318294...
512	0,318315...	0,318304..,
1024	0,318308...	0,318306...

Οἱ ὑπολογισμοί μας θὰ πρέπει νὰ τερματισθοῦν ἐνταῦθα, ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ βασιζώμεθα μὲ ἀσφάλειαν παρὰ ἐπὶ τῶν πέντε πρώτων δεκαδικῶν ψηφίων. Ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31831...$$

εὑρίσκομεν $\pi = 3{,}14157... = 3{,}1416...$

Πρόβλημα 642—VII

1773 δ. Ἐφαρμόσατε διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ π τοὺς τύπους τοῦ Legendre:

$$R' = \sqrt{\rho R} \quad \text{καὶ} \quad \rho' = R'\sqrt{\frac{R+\rho}{2\rho}},$$

(§ 1750), ἀναχωροῦντες ἀπὸ τοῦ τετραγώνου μὲ πλευρὰν 1.

Ἐφ' ὅσον αὐξάνει συνεχῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου σταθεροῦ ἐμβαδοῦ, ἐπὶ τοσοῦτον καὶ τὸ σχῆμα τοῦ πολυγώνου τούτου τείνει πρὸς περιφέρειαν, ἡ δὲ ἀκτὶς καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ τείνουν νὰ λάβουν τὴν αὐτὴν τιμὴν — τὴν τιμὴν τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ πολύγωνον κύκλου.

Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς 1 μέτρου ἔχει ἐμβαδὸν 1 τετρ. μέτρον· τὴν αὐτὴν τιμὴν θὰ ἔχουν τὰ ἐμβαδὰ τῶν διαδοχικῶν πολυγώνων, ὡς καὶ τὸ ὅριον αὐτῶν, ὁ κύκλος.

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι πR^2,

$$\pi R^2 = 1, \quad \pi = \frac{1}{R^2}.$$

Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἀκτῖνας καὶ τὰ ἀποστήματα τῶν διαδοχικῶν πολυγώνων, ἕως ὅτου ἀρχίσουν νὰ ἐμφανίζωνται κοινὰ δεκαδικὰ ψηφία, ἀπ' ἀριστερῶν, εἰς τὰς τιμὰς τῶν μηκῶν αὐτῶν. Θὰ ἔχωμεν τότε, μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν προσεγγίσεως, τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ἐμβαδοῦ 1 τετρ. μέτρου καὶ ἐξ αὐτῆς θὰ συναγάγωμεν τήν, ἀντιστοίχου προσεγγίσεως, τιμὴν τοῦ π.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀνωτέρω τύπων τοῦ Legendre δίδει τὰ ἑπόμενα ἀποτελέσματα.

Πλευραί	R	ρ
4	0,707108...	0,500000
8	0,594612...	0,549344...
16	0,571529...	0,560543...
32	0,566014...	0,563294...
64	0,564650...	0,563962...
128	0,564312...	0,564150...
256	0,564225...	0,564186...
512	0,564206...	0,564193...
1024	0,564200	0,564200

Εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον μὲ 1024 πλευράς, τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος τὰ πέντε πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία εἶναι τὰ αὐτὰ—καὶ ἐπὶ τούτων μόνον δυνάμεθα νὰ βασιζώμεθα, ἐφ' ὅσον οἱ ὑπολογισμοὶ γίνονται διὰ πενταψηφίων λογαριθμικῶν πινάκων.

Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ θέσωμεν διὰ τὸν ἰσοδύναμον πρὸς τὰ πολύγωνα κύκλον

$$R = 0,56420...\ \mu.,$$

καὶ νὰ εὕρωμεν

$$\pi = \frac{1}{R^2} = 3,1415...$$

Τιμαὶ τοῦ π 642—VIII

1773 ε. Ὁ *Ἀρχιμήδης* ἔδωσε ὡς προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ π τὸν ἀριθμὸν $\frac{22}{7}$, ὁ *Ἀδριανὸς Métius* τὸν λόγον $\frac{113}{355}$, οἱ δὲ νεώτεροι ὑπολογισταὶ *Sharps*, *Lagny* κλπ. εὗρον τὸν ἀριθμὸν π τῇ βοηθείᾳ σειρῶν καὶ ἐξώθησαν τὴν προσέγγισιν εἰς τοιοῦτον βαθμὸν ὥστε ἡ εὕρεσις μεγαλυτέρας αὐτῆς νὰ ἀποτελῇ πλέον ἄγονον ἀπασχόλησιν.

Σχετικῶς δύναταί τις νὰ συμβουλευθῇ τὰ *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1850, σ. 12· 1851, σ. 198· 1855, σ. 209) καθὼς καὶ τὴν *Association française pour l'avancement des sciences*, 1879, *Montpellier*, ἄρθρον τοῦ F. Ritter, μηχανικοῦ.

Διὰ τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ πράγματος, δίδομεν κάτωθεν τὸν ἀριθμὸν π μὲ 40 δεκαδικὰ ψηφία:

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971.

Ἰδοὺ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκριβῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ π, τὰ ὁποῖα διάφοροι ὑπολογισταὶ ἐπέτυχαν. Μετετρέψαμεν εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς κλασματικοὺς λόγους τοὺς δοθέντας ὑπὸ τῶν πρώτων γεωμετρῶν.

Ἀρχιμήδης	2
Οἱ Ἰνδοὶ ἀστρονόμοι	3
François Viète (1579)	7
Métius (1626)	8
Adrien Romanus	16
Ludolf van Ceulen (ἀπ. 1610)	35

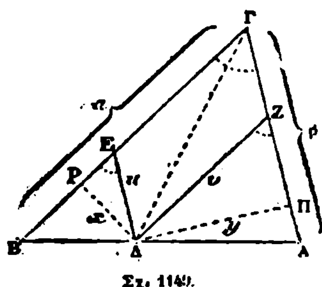
Sharps	73
Lagny (1719)	127
Vega	140
Dahse (1840, Βιέννη)	200
Richter (1853)	333
Rutherford (1855)	440
Shangks (1855)	530

Τὰ 330 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία ἐπαληθεύονται ὡς κοινὰ εἰς τὰ ἀποτελέσματα τῶν τριῶν τελευταίων ὑπολογιστῶν.

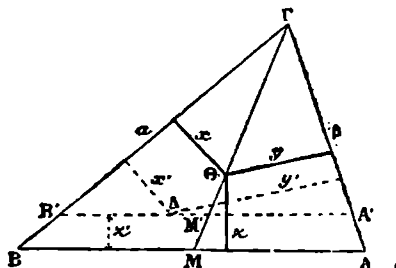
Θεώρημα 642—IX

1773ζ. **Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τριγώνου εἶναι τὸ σημεῖον δι' ὃ τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι μέγιστον.**

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι μία τῶν καθέτων ἀποστάσεων εἶναι σταθερά, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὸ γνωστὸν πρόβλημα: Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ τριγώνου (σχ. 1149) σημεῖον διὰ τὸ ὁποῖον τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν νὰ εἶναι μέγιστον (§ 1680).



Σχ. 1149.



Σχ. 1150.

Ἔστω Δ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς παραλλήλου Α'Β' τῆς ἀγομένης εἰς ἀπόστασιν δοθεῖσαν z' ἀπὸ τῆς ΑΒ (σχ. 1150).

Ἐπειδὴ αἱ κάθετοι x', y' πληροῦν τὴν σχέσιν

$$\Gamma B'.x' + \Gamma A'.y' = 2(A'\Gamma B'), \qquad (\S\ 1160,\ \alpha)$$

τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου $x'y'$ λαμβάνεται ὅταν τὰ μήκη x', y' εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν συντελεστῶν των (§ 347). Συμπίπτει, ἑπομένως, τὸ σημεῖον Δ πρὸς τὸ Μ', κοινὸν σημεῖον τῆς Α'Β' καὶ τῆς διαμέσου ΓΜ' ἢ ΓΜ τοῦ τριγώνου Α'ΓΒ'· ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΓΒ, ΓΑ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν πλευρῶν αὐτῶν (§ 164).

Δι' ὁμοίων συλλογισμῶν, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦ μεγίστου γινομένου xyz πρέπει νὰ εἶναι κοινὸν καὶ τῶν δύο ἄλλων διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Συμπίπτει δηλ. πρὸς τὸ κοινὸν σημεῖον Θ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου τούτου.

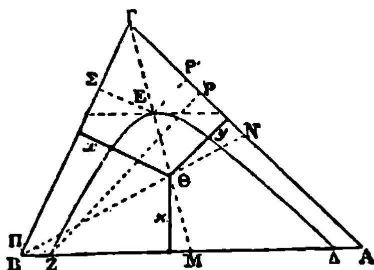
Τιμὴ τοῦ μεγίστου γινομένου. Ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν τριγώνων ΑΘΒ, ΒΘΓ, ΓΘΑ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν

$$x = \frac{2(\text{ΑΒΓ})}{3\alpha} = \frac{2\text{Ε}}{3\alpha}, \quad y = \frac{2\text{Ε}}{3\beta}, \quad z = \frac{2\text{Ε}}{3\gamma}.$$

Ὅθεν

$$\max.\ xyz = \frac{8\text{Ε}^3}{27\alpha\beta\gamma}.$$

1773 η. Παρατήρησις. Τὸ VIII Βιβλίον ὁδηγεῖ ταχύτερον καὶ ἁπλούστερον εἰς τὸ ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα.



Σχ. 1151.

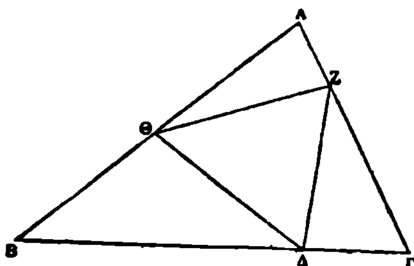
Γνωρίζομεν ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων Ζ διὰ τὰ ὁποῖα τὸ γινόμενον ΖΡ.ΖΠ εἶναι σταθερόν, εἶναι ὑπερβολὴ ΔΕΖ, ἔχουσα ὡς ἀσυμπτώτους τὰς εὐθείας ΓΑ, ΓΒ. Ἐὰν λοιπὸν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ γινόμενον xy εἶναι σταθερόν, τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου xyz ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τοῦ z, δηλ. εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης τῆς παραλλήλου τῆς ΑΒ.

Ἀλλ' εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη αὕτη διαιρεῖται, εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, εἰς δύο τμήματα ἴσα ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων ΓΑ καὶ ΓΒ. Κεῖται ἑπομένως τὸ σημεῖον τοῦ μεγίστου γινομένου xyz ἐπὶ τῆς διαμέσου ΓΜ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί, καθ' ὁμοίους συλλογισμούς, καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων διαμέσων αὐτοῦ.

Εἶναι δηλ. τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Θεώρημα 642—Χ

1773 θ. Διαιροῦμεν τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ κατὰ δοθέντας λόγους $\frac{x}{x'}$, $\frac{y}{y'}$, $\frac{z}{z'}$ διὰ τῶν σημείων Δ, Ζ, Θ. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν λόγων, λαμβάνομεν, διὰ τῶν σημείων διαιρέσεως, πέντε ἄλλα τρίγωνα διακεκριμένα, ἐν γένει, ἀλλήλων.



Σχ. 1152.

Δείξατε ὅτι τὰ ἓξ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.

1η Ἀπόδειξις. Τὸ θεώρημα εἶναι προφανὲς διὰ ἰσόπλευρον τρίγωνον. Ἐπειδὴ δέ, κατὰ ἄμεσον συνέπειαν τῶν §§ 1843, 1844 καὶ 1844, σημ. α, τὸ δοθὲν τρίγωνον δύναται πάντοτε νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρθὴ προβολὴ ἑνὸς

ἰσοπλεύρου τριγώνου, κατὰ δὲ τὴν προβολὴν ταύτην, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν προβαλλομένων ἐπιφανειῶν πρὸς τὰ ἐμβαδὰ τῶν προβολῶν των εἶναι σταθερὸς καί, προσέτι, ὁ λόγος τμημάτων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας παραμένει ἐπίσης σταθερός, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ἀμέσως:

Τὰ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον λαμβανόμενα ἐξ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς ἄλληλα, ὡς προβολαὶ ἴσων τριγώνων.

2α Ἀπόδειξις. Δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΔΖΘ συναρτήσει τῶν δοθέντων λόγων καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΑΒΓ. Ἔχομεν:

$$\frac{(\mathrm{A\Theta Z})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\mathrm{A\Theta}\,.\,\mathrm{AZ}}{\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{A\Gamma}}=\frac{zy'}{(z+z')\,(y+y')},$$

ἀφοῦ

$$\frac{\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{AB}}=\frac{z}{z+z'},\quad \text{καὶ}\quad \frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{y'}{y+y'}.$$

Ὁμοίως

$$\frac{(\mathrm{A\Delta\Theta})}{(\mathrm{BA\Gamma})}=\frac{xz'}{(x+x')\,(z+z')},\quad \frac{(\Gamma\Delta\mathrm{Z})}{(\Gamma\mathrm{AB})}=\frac{x'y}{(x+x')\,(y+y')}.$$

Διὰ προθέσεως λαμβάνομεν

$$\frac{(\mathrm{AB\Gamma})-(\Delta\mathrm{E}\Theta)}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{zy'(x+x')+xz'(y+y')+x'y\,(z+z')}{(x+x')\,(y+y')\,(z+z')},\qquad (1)$$

= συμμετρικὴ συνάρτησις τῶν τριῶν δοθέντων λόγων. Ἄρα...

Παρατήρησις. 1) Τὰ *κέντρα βάρους* τῶν ἐξ ἰσοδυνάμων τριγώνων ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν ἔλλειψιν, τὴν ἔχουσαν ὡς κέντρον τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ΑΒΓ εἶναι προβολή (93).

2) Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις καί τινας ἀναγωγὰς εἰς τὸν τύπον (1), εὑρίσκομεν:

$$\frac{(\Delta\mathrm{Z}\Theta)}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{xyz+x'y'z'}{(x+x')\,.\,(y+y')\,.\,(z+z')}.\qquad (2)$$

Σχετικῶς πρὸς τὸν τύπον τοῦτον, βλέπε N. C. M., 1880, σ. 472.

1773 ι. Σημείωσις. Γενίκευσις ὑπὸ Welsch.

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ρ τὰς εὐθείας, τὰς συνδεούσας τὰς ὁμολόγους κορυφὰς δύο τυχόντων πολυγώνων ἐκ ν πλευρῶν ἑκάστου, λαμβάνομεν ἓν νέον πολύγωνον ἐκ ν πλευρῶν, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι δευτεροβάθμιος συνάρτησις τοῦ λόγου ρ. Οἱ συντελεσταὶ τῆς συναρτήσεως ταύτης ὁρίζονται ἐκ

---

93. Σημ. μετ. Ἐπειδὴ εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ κ. βάρους τῶν ἴσων τούτων τριγώνων εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον Α'Β'Γ' ἴσον ἀπέχουν τοῦ κ. βάρους Θ' τοῦ τριγώνου αὐτοῦ καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ περιφερείας (Θ').

Αἱ προβολαὶ ἑπομένως αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ— οὖσαι κ. βάρους τῶν ἀντιστοίχων τριγώνων — θὰ κεῖνται ἐπὶ ἐλλείψεως (Θ). ἐχούσης ὡς κέντρον τὸ κ. βάρους Θ τοῦ ΑΒΓ.

τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο πολυγώνων καὶ ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τυχόντος ἐκ τῶν λαμβανομένων πολυγώνων.

Ἰδιαιτέρως, εἰς τὴν περίπτωσιν δύο τριγώνων ΔΕΖ, ΑΒΓ, ἐξ ὧν τὸ πρῶτον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ δεύτερον, ἐπειδὴ διὰ $\rho = \frac{1}{2}$ [ἀποδεικνύεται ὅτι] τὸ ἀντίστοιχον τρίγωνον εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ ΔΕΖ,—τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ ρ, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$E_{\rho} = (2\rho - 1)\rho T + (1 - \rho)^2 \tau,$$

ὅπου Τ καὶ τ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι τὸ ὀρθικὸν τοῦ ΑΒΓ καὶ ληφθῇ ρ ἴσον πρὸς $\frac{1}{3}$, θὰ ἔχωμεν τὸ τρίγωνον τῶν προβολῶν τοῦ κ. βάρους τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ τὰ ὕψη του. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου, ὁμοίου τοῦ ΑΒΓ, εἶναι

$$E_{1/3} = \frac{4\tau - T}{9}$$

καὶ ἔχει λόγον λ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ τὸν

$$\lambda = \frac{8 \,.\, \text{συν}\, A\, \text{συν}\, B\, \text{συν}\, \Gamma - 1}{9}. \quad (^{94})$$

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος αὐτοῦ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς *ἐκκεντρότητος* τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ ΑΒΓ.

Θεώρημα τοῦ Lhuillier 642—XI

1773 κ. Τὸ πολύγωνον μὲ κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς πλευρὰς κανονικοῦ πολυγώνου, τῶν ἀγομένων ἐκ σημείου Ρ, ἔχει σταθερὸν ἐμβαδόν, ὅταν τὸ σημεῖον Ρ κινῆται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ καν. πολύγωνον. (*A. d. G.*, τόμ. XV, (1824-25), σ. 45 καὶ 250).

Παρατήρησις. Τὸ τετράγωνον ἐξαιρεῖται· διὰ πᾶν σημεῖον Ρ, ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, τὸ ποδικὸν τοῦ Ρ τετράπλευρον ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου.

---

94. Σημ. μετ. Διὰ τὸ ποδικόν, πράγματι, τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ οἱ λόγοι $\frac{x}{x'}$, $\frac{y}{y'}$, $\frac{z}{z'}$ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσοι πρὸς $\frac{\text{εφ}\Gamma}{\text{εφ}B}$, $\frac{\text{εφ}A}{\text{εφ}\Gamma}$, $\frac{\text{εφ}B}{\text{εφ}A}$.

Ἑπομένως:

$$\lambda = \frac{E\frac{1}{3}}{T} = \frac{4\tau - T}{9T} =$$

$$= (\text{τύπος } 2)\frac{4}{9}\left[\frac{\text{εφ}\,A\;\text{εφ}\,B\;\text{εφ}\,\Gamma + \text{εφ}\,A\;\text{εφ}\,B\;\text{εφ}\,\Gamma}{(\text{εφ}\,A + \text{εφ}\,B)\;(\text{εφ}\,B + \text{εφ}\Gamma) + (\text{εφ}\,\Gamma + \text{εφ}\,A)}\right] - \frac{1}{9},$$

ἤ, μετὰ τινας στοιχειώδεις τριγωνομετρικοὺς μετασχηματισμούς,

$$\lambda = \frac{8\,\text{συν}\,A\;\text{συν}\,B\;\text{συν}\,\Gamma - 1}{9}.$$

Σημείωσις. 1) Ἡ λύσις τοῦ Sturm (ὡς ἀνωτ., σ. 250), ὑποδεικνείει πολλὰ ἄλλα ἐνδιαφέροντα θεωρήματα καὶ ἰδιαιτέρως τὸ ἑπόμενον:

Ὁ τόπος τῶν σημείων Ρ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν αὐτῶν δυνάμεων τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τῶν πλευρῶν κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι σταθερόν, εἶναι περιφέρεια κύκλου ὁμόκεντρος τοῦ πολυγώνου, ἐφ' ὅσον ὁ ἐκθέτης μ τῆς δυνάμεως εἶναι μικρότερος τοῦ πλήθους ν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

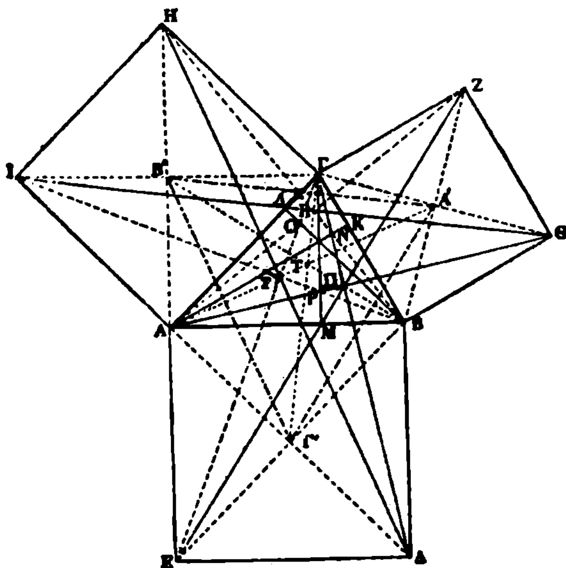
Οὕτω, τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ($\nu = 3$) καὶ διὰ $\mu = 1$ ἢ 2. Διὰ $\mu = 3$ παύει ὅμως νὰ ἀληθεύῃ· ἐπειδὴ ὁ τόπος τότε τῶν σημείων Ρ εἶναι καμπύλη τρίτου βαθμοῦ (ὡς ἄνω, σ. σ. 252 ἕως 256).

Εἰς ὡραῖον ἄρθρον τῆς *J. M. E.*, (1889, σ. 49-52), ὁ Vigarié ἀναφέρει καὶ συμπληρώνει τὸ *θεώρημα τοῦ Sturm*. Βλ. Θεωρήματα I ἕως VIII.

Θεώρημα τοῦ Vecten 642—XII

1773 λ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τρία τετράγωνα ΑΔ, ΒΖ, ΓΙ. Δείξατε ὅτι:

1) Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου φέρωμεν καθέτους ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς, ὡς καὶ τὰς εὐθείας ΑΘ, ΒΙ,



Σχ. 1152 α

ΒΗ, ΓΔ, ΓΕ, ΑΖ, αἱ δύο πρῶται τέμνονται εἰς Ρ ἐπὶ τῆς ΓΜ, αἱ ἑπόμεναι δύο εἰς Ν ἐπὶ τῆς ΑΚ καὶ αἱ δύο τελευταῖαι εἰς Ο ἐπὶ τῆς ΒΛ.

2) Αἱ ἓξ αὗται εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας ἀνὰ δύο: ἡ ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΘ, ἡ ΑΖ ἐπὶ τὴν ΒΗ, ἡ ΒΙ ἐπὶ τὴν ΓΕ. Ἔστωσαν Π, R, Σ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ζευγῶν τῶν εὐθειῶν τούτων.

3) Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΙΘ, ΗΔ διέρχονται διὰ τῶν σημείων Π, R, Σ ἀντιστοίχως καὶ διχοτομοῦν τὰς εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ γωνίας τῶν προηγουμένων ἓξ εὐθειῶν.

4) Αἱ εὐθεῖαι ΑΣ, ΒΠ, ΓΡ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Τ, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΔΗ, ΕΖ, ΘΙ ἀντιστοίχως καὶ διέρχονται διὰ τῶν κέντρων τῶν τετραγώνων.

5) Αἱ εὐθεῖαι ΔΘ, ΖΗ, ΙΕ μετὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ σχηματίζουν τρία τρίγωνα, τὰ ΔΒΘ, ΖΓΗ, ΙΑΕ, ἰσοδύναμα πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ΑΒΓ.

6) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν τελευταίων εὐθειῶν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ.

Δηλαδή: ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, κατὰ μήκη ΒΑ', ΓΒ', ΑΓ' ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς πλευράς, καὶ φέρωμεν τὰς εὐθείας Α'Γ, Β'Α, Γ'Β θὰ ἔχωμεν:

$$A'\Gamma^2 + B'A^2 + \Gamma'B^2 = 3(AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma A^2).$$

Παρατήρησις. Παραθέτομεν τὸ ἴδιον σχῆμα τὸ δοθὲν ὑπὸ τοῦ Vecten, συμπληροῦντες αὐτὸ καὶ διὰ τῶν κέντρων τῶν τετραγώνων. Καθ' ὅσον γνωρίζομεν, ὁ Laisant εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἐθεώρησε τὰ κέντρα τῶν ἐπὶ τῶν πλευρῶν πολυγώνου κατασκευαζομένων τετραγώνων (*N. C.*; 1877, σ. 368 καὶ 400, ζητήματα 290 καὶ 302). Ἡ εὐθεῖα Β'Γ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΗ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς.—Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ σημείου Σ, ἄρα καὶ τῆς ΑΣΤ εὐθείας, δὲν ἀπαιτεῖ παρὰ τὴν ἀγωγὴν τῶν ἴσων καὶ ὀρθογωνίων εὐθειῶν ΒΙ, ΓΕ· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ σημείου Α' καὶ τῆς εὐθείας ΑΣΤΑ'.

Εἶναι ὅμως φυσικωτέρα ἡ ἀγωγὴ τῶν διαγωνίων ΒΖ, ΓΘ κλπ. διὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν κέντρων τῶν τετραγώνων καὶ τὴν εὕρεσιν τοῦ *σημείου* Τ *τοῦ Vecten*, κοινῆς τομῆς τῶν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ'.

1773 μ. Σημείωσις. Τὸ προηγούμενον ζήτημα εὑρίσκεται εἰς τὰ *A. d. G.* (τόμ. VII (1816 - 1817), σ. 321) καὶ ὀφείλεται εἰς τὸν Vecten, καθηγητὴν τῶν εἰδικῶν Μαθηματικῶν εἰς *Nîmes*.

Τὸ κοινὸν σημεῖον Τ τῶν εὐθειῶν ΓR, ΒΠ, ΑΣ θὰ πρέπει νὰ ὀνομάζεται *σημεῖον τοῦ Vecten*.

Ὁ J. Neuberg (*N. C. M.*, τόμ. IV, 1878, σ. 142 - 145, nos 4 καὶ 5), συνεπλήρωσεν ὡς ἑξῆς τὴν ἀρχικὴν ἐκφώνησιν τοῦ θεωρήματος:

Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' *εἶναι ἀντιστοίχως, ἴσαι καὶ κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας* Β'Γ', Γ'Α', Α'Β'.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΙ, ΓΕ *καὶ* ΔΗ *τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον*.

Ἡ 4η πρότασις τοῦ θεωρήματος τοῦ Vecten δύναται νὰ λάβῃ τώρα καὶ τὴν ἑξῆς μορφήν:

Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' *τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον* Τ *ἢ σημεῖον τοῦ Vecten*· ἐπειδὴ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

1773 ν. Διὰ τὸ πρόβλημα: *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον* ΑΒΓ *ἐκ τῶν κέντρων* Α', Β', Γ'. *τῶν ἐπὶ τῶν πλευρῶν του κατασκευαζομένων τετραγώνων*, βλέπε: *N. C.*, τόμ. VI, 1880, σ. 364, J. Neuberg· σ. 509, E. Lemoine.—*A. F.*, Μασσαλία, 1891, σ. 38 - 43, Ed. Collignon.